차 례

머 리 말

위대한 령도자 **김정일**대원수님께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《집단의 발전을 확고히 보장하면서 매 사람의 소질과 재능을 꽃피워주는것은 우리 나라 사회주의교육의 커다란 우월성이며 뛰여난 소질과 재능을 가진 학생들을 선발하여 체계적으로 교육하는것은 전문분야의 특출한 인재를 양성하며 과학기술교육의 전반적수준을 높이는데서 중요한 의의를 가집니다.》

위대한 장군님의 말씀을 높이 받들고 출판사에서는 뛰여난 학생들이 물리지식을 더욱 폭넓고 깊이있게 소유하도록 하기 위하여 이 책을 내보낸다.

이 책에서는 지난 기간 국제물리올림픽경연에서 제시되였던 여러가지 문제들과 그밖의 비교적 어려운 물리문제들을 력학, 열학, 전기학, 광학, 현대물리초보 등의 순서로 제시하고 그 뒤에 답과 풀이방향을 구체적으로 설명하는 형식으로 서술하였다. 여기에서 올림픽경연모의문제들은 국제물리올림픽경연과정에 나왔던 문제들이다.

이 책에 제시된 문제들은 중학교 물리교육내용들을 충분히 고려한것들이지만 뛰여난 학생들의 지식정도에 맞게 보다 높은 수준에 이른것들도 있다. 한편 일부 문제들은 응용능력, 창조적사고능력을 계발시킬것을 목적으로 린접과목들과 련관시켰으며 더 나아가서 첨단과학기술분야의 최신성과들과도 련관시켰다. 때문에 문제들을 리해하고 푸는 과정자체가 뛰여난 학생들에 대한 일련의 새로운 교육과정으로 된다.

일반적으로 《어려운 문제》라고 할 때 이것은 기본상 두가지 형태의 문제들로 갈라볼수 있다.

그 첫째 형태는 단순한 좁은 범위의 문제인것이 아니라 종합적인 성격의 문제들이다. 이런 문제들을 원만히 풀자면 물리학의 기초개념들과 법칙들을 명백히 알고있어야 할뿐아니라 물리과목에서 배운 여러가지 지식들, 지어는 다른 과목의 지식까지도 능숙하게 결합시킬줄 아는 능력을 소유하여야 한다.

두번째 형태는 현실과 밀접히 결합되여있는 응용성이 높은 문제들이다. 이런 문제들을 능숙히 풀려면 주위현실에 대한 폭넓고 깊은 지식을 가지고있어야 할뿐아니라 복잡하게 엉켜있는 여러가지

현상들을 통하여 하나의 본질적인 합법칙성을 찾아내는 능력을 부단히 키워나가야 한다.

어려운 문제들을 많이 풀어보는 과정에 하나를 통하여 여러가지 지식을 습득할줄 아는 능력을 키워나가게 되며 자기자신에 대한 자신심과 긍지감도 생겨나게 되는것이다.

문제풀이과정은 답을 맞추는것으로 끝낼것이 아니라 반드시 그 과정을 종합적으로 재분석해보고 그 결과를 어떻게 실천응용에 합리적으로 적용하겠는가 하는 가능성들을 최대한 탐구해나가는 과정으로 되여야 한다. 그래야 현실적으로 제기되는 과학기술적문제들을 능숙히 해결하는 능력을 키워낼수 있으며 나아가서 새로운 과학적탐구와 착상의 실머리들도 찾아낼수 있게 된다.

이 책이 위대한 **김일성**조국, **김정일**장군님의 나라를 경애하는 **김정은**선생님의 령도따라 만방에 빛내여나가는데 적극 이바지하는 물리학부문의 뛰여난 소질과 재능을 가진 학생들을 적극 키워내며 옳게 선발하는데서 적으나마 이바지되기를 바란다.

문 제 편

제1장. 운 동 학

I

1. 어떤 사람이 ㄱ지역에서 ㄴ지역까지 처음에는 기차를 타고 그 다음에는 자동차를 타고갔는데 기차의 평균속도는 60km/h, 자동차의 평균속도는 40km/h이다. 첫번째 경우 절반시간동안 기차를 타고가고 절반시간동안은 자동차를 타고갔다. 두번째경우 절반거리는 기차를 타고가고 절반거리는 자동차를 타고갔다. ㄱ에서 ㄴ까지의 운동을 직선운동이라고 하면 첫번째 경우와 두번째 경우의 평균속도는 ( )이다.
   1) 둘다 50km/h
   2) 둘다 48km/h
   3) 첫번째 경우 50km/h, 두번째 경우 48km/h
   4) 첫번째 경우 48km/h, 두번째 경우 50km/h
2. 그림 1-1-1에 세 질점 ㄱ, ㄴ, ㄷ의 S-t그라프를 보여주었다. 그림에서 알수 있는바와 같이 t_A 시간동안에 ( )
   1) ㄱ의 변위가 제일 크다.
   2) ㄱ, ㄴ, ㄷ의 변위는 서로 같다.
   3) ㄱ의 로정이 제일 크다.
   4) ㄷ의 로정이 ㄴ의 로정보다 크다.

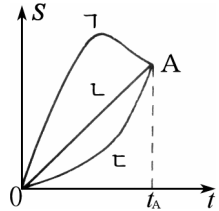



그림 1-1-1

3. 그림 1-1-2에서 M, N은 같은 축을 가진 두개의 원통의 자름면이고 R는 외부원통의 반경이다. 내부원통의 반경은 R보다 대단히 작아서 무시할수 있다. 통의 아래쪽과 웃쪽은 모두 막혀있으며 두 통사이에는 진공이 보장되여있다. 두개의 통이 서로 같은 각속도 ω로 하나의 축(그림에서 종이면에 수직)을 중심으로 등속으로 회전하고있다. M통내부에 실틈 S(M통의 축과

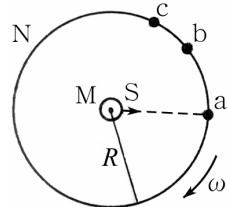



그림 1-1-2

평행이다.)를 통해 속도 v_1와 v_2을 가지고 련속적으로 미립자들을 방출하는 장치가 설치되여있다. 실틈 S의 자리에서 방출될 때 미립자들의 처음속도의 방향은 원통의 반경방향이며 N통에 도달하면 거기에 붙는다. 만약 R, v_1와 v_2이 모두 변하지 않고 ω가 어떤 적당한 값을 취한다면

1) 미립자들이 N통에 떨어지는 자리는 b와 a사이의 좁은 띠 구역이다.
2) 미립자들이 N통에 떨어지는 자리는 어떤 장소 례들면 실틈과 평행인 좁은 띠모양의 b자리이다.
3) 미립자들이 N통에 떨어지는 자리는 각각 어떤 두 곳 례하면 실틈과 평행인 좁은 띠모양의 b와 c자리이다.
4) 시간이 대단히 길면 N통우의 곳곳에 미립자들이 떨어지게 된다.

4. 교예배우가 드림선우로 4개이 작은 공을 순차적으로 던지는데 매 공이 올라가는 최대높이는 1.25m이다. 이 교예배우가 한개 공을 올려던지고 즉시 다른 공을 받는데 공중에는 3개의 공이 떠있고 손에는 1개의 공이 머무른다면 매개 공이 손에서 머무르는 시간은 얼마인가?

5. 그림 1-1-3에서 보여주는바와 같이 두 물체 A, B를 서로 끈으로 련결하고 물우에서 운동시킨다. $\alpha=30°$, $\beta=45°$ 일 때 물체 A의 속도가 2m/s 이면 물체 B의 속도는 얼마인가?

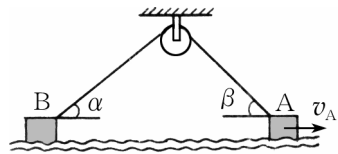



그림 1-1-3

6. 한대의 소형밀차가 수평면우의 긴 직선자리길을 따라 등속으로 오른쪽 방향으로 운동한다.(그림 1-1-4) 집초가 잘되는 레이자장치가 소형회전대 M우에 설치되여있는데 궤도까지의 거리 MN은 $d=10$m이다. 회전대는 등속으로 회전하며 레이자빛묶음은 수평면내에서 복사되는데 복사되는 주기는 $T=60$s, 회전방향은 그림과 같다. 빛묶음과 MN사이의 각이 45°일 때 빛묶음이 차에 와닿았고 $\Delta t=2.5$s 지나서 빛묶음이 다시 차에 와닿았다면 이 차의 속도는 얼마인가?

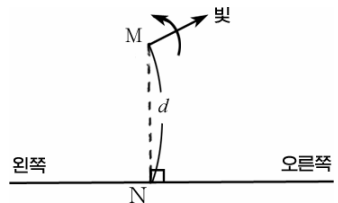



그림 1-1-4

7. 우산을 펼쳤을 때 변두리로부터 우산대까지의 반경은 r이고 변두리로부터 땅면까지의 높이는 h이다. 이제 각속도 ω로 우산대를 돌려 등속으로 회전하게 하면 비방울이 변두리로부터 뿌려져서 땅우에 원둘레를 만든다.(우산면을 수평면으로 가정한다.)

1) 비방울이 우산면으로부터 뿌려진 후에 어떤 운동을 하는가?

2) 뿌려진 비방울이 땅우에 만드는 원의 반경을 구하여라

Ⅱ

8. 그림 1-1-5에서처럼 반경이 R인 원기둥체가 두개의 수평나무판사이에서 굴러가고있다. 두개의 나무판자는 같은 방향으로 수평운동을 하며 $v_1>v_2$이다. 원기둥체와 두 나무판자사이에 호상마찰이 없다면 원기둥체의 회전각속도는 얼마인가? 또한 원기둥체중심 O의 수평운동속도는 얼마인가?

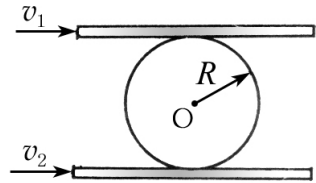



그림 1-1-5

9. 그림 1-1-6과 같이 너비가 c인 직선도로를 따라 똑같은 차들이 속도 v로 한 직선을 따라 지나가고있다. 차의 너비 b, 앞차의 뒤부분과 뒤차의 앞부분사이의 거리는 a이다. 사람이 최소한의 속도로 직선을 따라 도로를 가로건너가는데 걸리는 시간은 얼마인가?

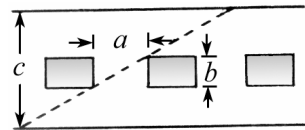



그림 1-1-6

10. 그림 1-1-7에서 a, b는 두 단계의 항행에서의 함선의 운동방향과 파도치는 구역의 경계선을 보여준다. 제1단계 항행에서는 물이 정지되여있다. 제2단계 항행에서의 물이 흐름방향을 화살표로 나타냈다. 두 단계의 항행에서 땅(지구)에 대한 함선의 속도가 다같이 18km/h라면 물의 흐름속도는 얼마인가?

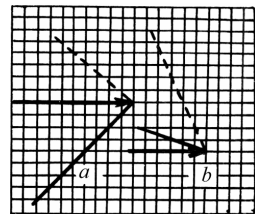



그림 1-1-7

11. 쥐가 동굴을 떠나서 직선을 따라 전진하는데 쥐의 속도는 동굴까지의 거리에 거꿀비례한다. 쥐가 전진하여간 거리가 d_1일 때 ㄱ위치에서 속도가 v_1이라면 d_2인 때 ㄴ위치에서의 속도 v_2

은 얼마인가? ㄱ위치에서 ㄴ위치로 가는데 걸리는 시간은 또 얼마인가?

12. 그림 1-1-8에서 보여준것처럼 경사각이 α인 경사면웃쪽에 일정한 점 O가 있다. 이제 한 질점을 O에서 정지상태로부터 미끄러운 경사홈을 따라 경사면까지 내려보내려고 한다. 경사홈과 드림선방향이 이루는 각 θ가 얼마일 때 질점이 O점에서 경사면까지 도달하는데 걸리는 시간이 가장 짧은가?

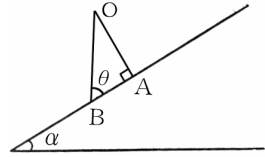



그림 1-1-8

III

13. 포물선의 방정식 $y = Ax^2$ 이 주어졌다. 물리적방법을 적용하여 임의의 x위치에서 포물선의 곡률반경을 구하여라.

14. 반경이 R인 반원기둥체가 수평방향을 따라 오른쪽으로 가속도 a로 등가속운동한다. 반원기둥체우에 수직으로 아래우방향으로 움직일수 있는 막대기가 놓여있다.(그림 1-1-9) 반원기둥체의 속도가 v인 때 막대기와 반원기둥체와의 접촉점 P와 반원기둥체중심의 련결선이 수직방향과 이루는 각이 θ이다. 수직으로 세운 막대기의 운동속도와 가속도를 구하여라.

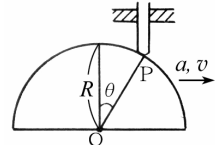
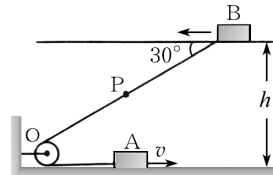



그림 1-1-9

15. 그림 1-1-10과 같이 하나의 수직평면안에 두개의 수평자리길이 있는데 그것들사이의 거리는 h이고 자리길우에 두개의 물체 A와 B가 있다. 이것들은 고정도르래를 통해 늘어나지 않는 가벼운 끈으로 서로 련결되여있다. 물체 A는 아래쪽 자리길에서 v속도로 등속운동한다. 끈과 이 자리길사이의 각이 30°로 되는 순간 끈 BO의 중심점 P에 붙어있던 작은 물방울 P가 끈과 분리된다. 끈 BO의 길이는 도르래의 직경보다 훨씬 크다.

그림 1-1-10

1) 작은 물방울 P가 끈에서 리탈될 때의 속도의 크기와 방향을 구하여라.
2) 작은 물방울 P가 끈으로부터 리탈되여 아래자리길에 떨어지는데 걸리는 시간을 구하여라.

제2장. 운동법칙

I

1. 한 물체가 경사각이 θ인 경사면우에 놓여있는데 이 경사면은 가속도 a로 올라가는 승강기안에 설치되여있다.(그림 1-2-1) 물체가 언제나 경사면에 정지되여있다면 아래의 설명중에서 정확한것을 선택하여라.

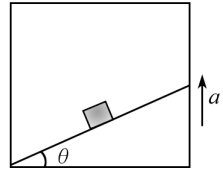



그림 1-2-1

   1) θ가 일정할 때 a가 크면 클수록 물체가 경사면을 수직으로 누르는 압력은 작아진다.
   2) θ가 일정할 때 a가 크면 클수록 물체와 경사면의 마찰력은 점점 작아진다.
   3) a가 일정할 때 θ가 크면 클수록 물체가 경사면을 수직으로 누르는 압력은 점점 작아진다.
   4) a가 일정할 때 θ가 크면 클수록 경사면과 물체의 마찰력은 점점 작아진다.

2. 어떤 원판이 자기의 중심에 수직인 축둘레로 돌아가고있다.(그림 1-2-2) 원판우에는 한 쪼각의 나무토막이 있다. 원판이 등각속도로 돌아갈 때 나무토막이 원판을 따라 함께 운동한다면 다음의 내용들중에서 정확한것을 선택하여라.

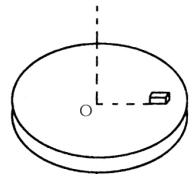



그림 1-2-2

   1) 나무토막과 원판사이의 마찰력의 방향은 원판중심으로부터 멀어지는 쪽으로 향한다.
   2) 나무토막과 원판사이의 마찰력의 방향은 원판중심으로 향한다.
   3) 나무토막이 원판을 따라 함께 운동할 때 원판과 나무토막사이의 마찰력의 방향과 나무토막의 운동방향은 서로 같다
   4) 마찰력이 계속 물체의 운동을 방해하므로 나무토막과 원판사이의 마찰력의 방향과 나무토막의 운동방향은 서로 반대이다.
   5) 원판과 나무토막이 호상정지된것으로 하여 이것들사이에는

마찰력이 없다.

3. 고속도로의 굽인돌이에서의 도로면은 바깥쪽은 높고 안쪽은 낮게 건설한다. 즉 차가 오른쪽으로 돌려고 할 때 왼쪽의 도로면은 오른쪽의 도로면보다 약간 높아야 한다. 도로면과 수평면사이의 각이 θ이고 굽인돌이부분이 반경이 R인 원둘레로 되여있고 차속도가 v인 때 차바퀴와 도로면사이의 마찰력이 령이라고 하면 θ는 다음과 같다.정확한것을 선택하여라.

1) $\arcsin\frac{v^2}{Rg}$　　2) $\arctan\frac{v^2}{Rg}$

3) $\frac{1}{2}\arctan\frac{2v^2}{Rg}$　　4) $arc\cot\frac{v^2}{Rg}$

4. 한개의 가벼운 용수철과 한개의 가는 선이 함께 질량이 m인 작은 구를 끌어당기고있다. 평형을 이룰 때 가는 선은 수평을 이룬다. 용수철은 드림선과 θ의 각을 이루고있다. 가는 선을 자른다면 끊어지는 순간의 용수철의 튕힘은 얼마인가? 작은 구의 가속도의 방향과 수직방향사이의 각은 얼마인가?

5. 그림 1-2-3과 같이 질량이 $M=4\text{kg}$인 직6면체모양의 철상자가 수평으로 끄는 힘 F의 작용을 받아 수평면을 따라 오른쪽으로 운동한다. 철상자와 수평면사이의 마찰결수는 $\mu_1=0.2$이다. 이때 철상자안에서 질량이 $m=1\text{kg}$인 나무토막이 철상자의 뒤벽을 따라 등속으로 내려온다. 나무토막과 철상자사이의 마찰결수는 $\mu_2=0.5$이다. 수평으로 끄는 힘 F의 크기를 구하여라 ($g=10\text{m/s}^2$)

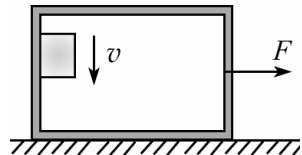



그림 1-2-3

6. 물리실험실에 크기를 조절할수 있는 수평방향의 풍력장치가 있다. 작은 구를 꿰지른 가는 직선막대기가 이 장치앞에 놓여있다.(그림 1-2-4)

1) 막대기가 수평방향으로 고정되였을 때 작은 구가 막대기우에서

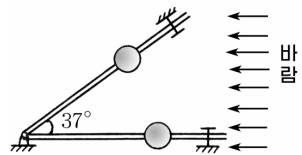



그림 1-2-4

등속으로 운동하는데 이때 작은 구가 받는 풍력은 중력의 0.5배이다. 작은 구와 막대기사이의 미끄럼마찰결수를 구하여라.

2) 작은 구가 받는 풍력이 변하지 않고 막대기와 수평방향사이를 37°로 고정한다면 작은 구가 정지상태로부터 가는 막대기우에서 거리 S만큼 미끄러져내려오는데 걸리는 시간은 얼마인가?($\sin 37°=0.6$, $\cos 37°=0.8$)

7. 미끄러운 수평자리길우에 반경이 r인 두개의 작은 구 A와 B가 있다. 질량은 각각 m와 $2m$이다. 두 구중심사이의 거리가 l보다 클 때(l은 $2r$보다 훨씬 크다.) 두 구사이에는 호상작용힘이 존재하지 않는다. 두 구중심사이의 거리가 l과 같거나 작을 때 두 구들사이에는 일정한 밀힘 F가 작용한다. 구 B로부터 멀리 떨어져있던 구 A가 두 구의 중심을 련결한 선을 따라 v_0의 속도로 운동하여올 때 멎어있던 구 B를 운동시킨다.(그림 1-2-5) 두 구가 접촉되지 않으려면 v_0이 어떤 조건을 만족해야 하는가?

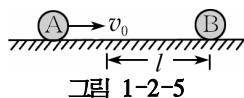



그림 1-2-5

Ⅱ

8. 혈액검사에는 《혈침》이라는 항목이 있다. 혈액은 적혈구와 혈장으로 이루어진 혼탁액이다. 이것을 수직으로 설치된 혈침관속에 넣으면 적혈구는 혈장속에서 일정한 속도로 가라앉는다. 이 속도를 혈침이라고 부른다. 어떤 사람이 혈침값이 v=10mm/h이다. 적혈구를 반경이 R인 작은 구로 보면 그것의 혈장속에 가라앉을 때 받게 되는 끈기저항력은 $f=6\pi\eta Rv$이다. 여기서 $\eta=1.8\times10^{-3}$Pa·s, 혈장의 밀도 $\rho_1=1\times10^3$kg/m^3, 적혈구의 밀도 $\rho_2=1.3\times10^3$kg/m^{3}이다. 적혈구의 반경을 계산하여라.

9. 그림 1-2-6의 ㄱ와 같이 수평벨트콘베아에서 수평단의 길이는 l=6m, 량쪽 피대바퀴의 반경은 $r=0.1$m, 땅면으로부터의 높이는 $H=5$m이다. 벨트콘베아와 같은 높이에 있는 수평미끄럼

대우의 한 물체가 $v_0 = 5\text{m/s}$의 처음속도로 미끄러져 콘베아로 넘어간다. 물체와 콘베아사이의 마찰결수는 $\mu = 0.2$이다. 중력가속도는 $g = 10\text{m/s}^2$으로 한다. 피대바퀴가 등속으로 돌아갈 때 그 속도는 v', 물체가 수평포물선운동할 때의 수평거리는 S이다. v'가 변하면 그에 따라 S도 변한다. 피대바퀴의 운동방향에 대하여 피대웃부분이 오른쪽으로 향할 때 $v' > 0$, 왼쪽으로 향할 때 $v' < 0$으로 표시한다. 그림 ㄴ에 주어진 자리표계우에 정확한 거리-속도그라프를 그리여라.(물체가 피대에서 떨어지는 즉시 수평포물선운동을 한다고 본다.)

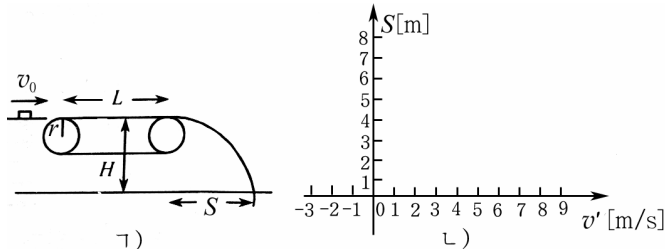



그림 1-2-6

10. 그림 1-2-7과 같이 수평으로 된 책상우에 한개의 축바퀴 A가 고정되여있는데 축바퀴의 반경은 r, 그 변두리에는 질량을 무시할수 있는 가는 끈을 매고 끈의 다른 끝에는 나무토막 B를 달았다. 나무토막과 책상면사이의 마찰결수는 μ이다. 축바퀴 A가 등각속도 ω로 돌아갈 때 나무토막이 함께 따라 돌아가는데 일정한 시간이 지나면 B와 A의 각속도는 꼭 같아진다.

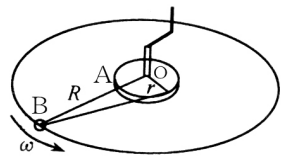



그림 1-2-7

1) 이때 나무토막 B의 회전반경 R는 얼마인가?

2) 마찰결수 μ와 바퀴반경 r값이 주어졌을 때 이와 같은 운동이 진행되자면 각속도 ω가 어떤 조건을 만족해야 하는가?

11. 그림 1-2-8과 같이 수평면과 각 α를 이루면서 고정된 굳은 막대기우에서 질량이 m_1인 작은 고리 A가 이 막대기를 따라 마찰이 없이 이동할수 있다. 가벼운 끈 AB를 리용하여 질량이 m_2인 무거운 물체를 작은 구에 련결하였다. 처음에 손으로 AB가 수직상태에 놓이도록 하고 A를 놓는 순간에 끈에서의 장력을 구하여라.

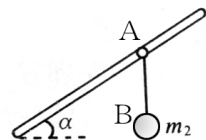



그림 1-2-8

12. 길이가 각각 l_1와 l_2인 늘어나지 않는 가벼운 끈에 질량이 각각 $m_1 = m_2 = m$ 인 두개의 구가 매달려있다.(그림 1-2-9) 이것들은 처음에 정지상태에 있다. 중간에 있는 질량이 m_1 인 구가 갑자기 수평방향으로 충격을 받는 순간에 얻는 수평방향속도는 v_0 이다. 이때 질량이 m_2 인 구가 련결된 끈에서의 장력 T 는 얼마인가?

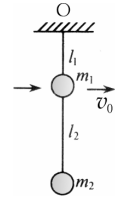



그림 1-2-9

Ⅲ

13. 그림 1-2-10과 같이 질량이 m_A , m_B 인 두개의 나무토막 A와 B가 수평책상면우에 놓여있다. A와 B사이는 마찰이 없다. 두 나무토막과 책상면사이의 정지마찰결수와 미끄럼마찰결수는 μ 이다. 처음에 A, B는 정지되여있다. 이제 수평방향으로 힘 F를 작용시킨다. A, B가 오른쪽방향으로 미끄러지고 그것들사이에는 상대운동이 없다고 하면

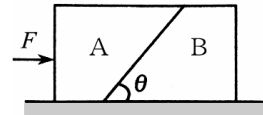



그림 1-2-10

1) μ 의 값은 어떤 값을 만족하여야 하는가?

2) 힘 F의 최대값은 얼마를 초과할수 없는가?

14. 미끄러운 수평대우에 질량이 M인 쐐기 B가 있다. 쐐기의 미끄러운 경사면우에 질량이 m 인 물체 A가 있다.(그림 1-2-11) A와 B의 운동정형을 말하고 B가 수평대를 누르는 힘을 구하여라.

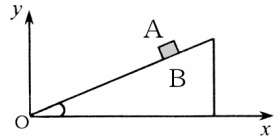



그림 1-2-11

15. 미끄러운 수평판우에 질량이 M_3 인 판이 놓여있는데 이 판우에 한개의 경사면과 한개의 물체가 쌓여있다.(그림 1-2-12) 경사면의 질량은 M_2 ,물체의 질량은 M_1 ,경사면의 경사각은 θ 이다. M_1 와 M_2 사이의 마찰결수는 μ_1 , M_2 과 M_3 사이의 마찰결수는 μ_2 이다. 이제 M_3 에 일정한 수평힘 F 를 작용시킨다. F 가 얼마일 때 3개 물체가 상대적으로 정지상태를 유지하겠는가?

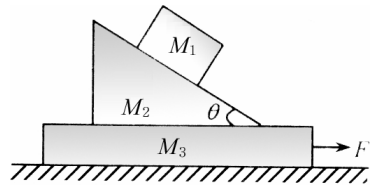



그림 1-2-12

제3장. 일과 에네르기

I

1. 작은 물체가 미끄러운 경사면우에 있고 이 경사면은 미끄러운 수평인 땅면우에 놓여있다. 땅면에서 볼 때 작은 물체가 경사면을 따라 미끄러져 내려오는 과정에 이 물체가 경사면에 주는 작용힘은 다음과 같다.(그림 1-3-1) 정확한것을 선택하여라.

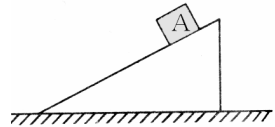



그림 1-3-1

1) 접촉면에 수직이며 수행한 일은 령이다.
2) 접촉면에 수직이며 수행한 일은 령이 아니다.
3) 접촉면에 수직이 아니며 수행한 일은 령이다.
4) 접촉면에 수직이 아니며 수행한 일은 령으로 되지 않는다.

2. 그림 1-3-2에서 용기 A, B는 자유롭게 이동하는 가벼운 피스톤이다. 피스톤의 아래쪽은 물이고 웃쪽은 대기이며 대기압은 일정하다. A, B의 아래부분은 변 K에 의해서 서로 련결되여있다. 전체 장치는 외부와 단열되여있다. 처음에 A의 물면이 B의 물면보다 높았다. 변을 열어서 A의 물이 점점 B로 흘러들어 마지막에는 평형상태에 이른다. 이 과정에 ( )

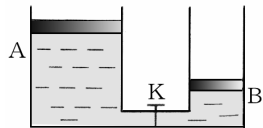



그림 1-3-2

1) 대기압이 물에 대해 일을 하며 물의 내부에네르기는 증가한다.
2) 물이 대기압을 극복하면서 일을 하며 물의 내부에네르기는 감소한다.
3) 대기압은 물에 대해 일을 수행하지 않고 물의 내부에네르기는 변하지 않는다.
4) 대기압은 물에 대해 일을 하지 않고 물의 내부에네르기는 증가한다.

3. 풍력에네르기는 일종의 환경보호형에네르기원천이다. 풍력발전기에서는 바람의 운동에네르기를 전기에네르기로 변화시킨다. 공기의 밀도가 ρ, 바람의 수평방향속도를 v, 풍력발전기에서

매개 날개의 길이가 L, 바람의 운동에네르기가 전기에네르기로 전환되는 효률이 η라고 할 때 이 풍력발전기에서 생산되는 전력은 $P=$ [ ] 이다.

4. 그림 1-3-3과 같이 튐성결수가 k_1인 가벼운 용수철의 량끝에 각각 질량이 m_1, m_2인 물체가 설치되여있다. 튐성결수가 k_2인 가벼운 용수철의 웃끝과 물체 2가 련결되여있다. 이 용수철의 아래끝은 책상면을 누르고있으면서(련결되여있지는 않다.) 전체적으로 평형상태에 놓여있다. 이제 힘을 가하여 물체 1을 우로 끌어올려 아래 용수철의 끝이 책상면과 분리되게 한다. 이 과정에 물체 2의 중력포텐샬에네르기는 [ ]로 증가하였다. 또한 물체 1의 중력포텐샬에네르기는 [ ]으로 증가하였다.

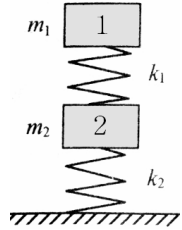
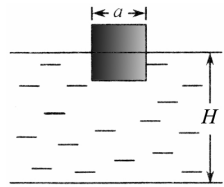



그림 1-3-3

5. 면적이 대단히 큰 수원지가 있다. 물의 깊이는 H이고 물우에 바른6면체나무토막이 떠있는데 한변의 길이는 a이고 밀도는 물의 1/2이다. 이 토막의 질량은 m이다. 처음에 나무토막은 정지되여있으며 절반은 물속에 잠겨있다.(그림 3-4) 이제 힘 F를 주어서 나무토막을 천천히 수원지밑으로 내려보낸다. 이때 마찰은 없다고 본다.

1) 나무토막이 물속에 완전히 잠긴때로부터 수원지밑에 닿을 때까지의 과정에 수원지 물의 포텐샬에네르기변화량을 구하여라.

2) 처음부터 나무토막이 물속에 완전히 잠길 때까지의 과정에 힘 F가 수행한 일을 구하여라.

그림 1-3-4

6. 차가 고정도르래에 감긴 줄 PQ로 질량이 M인 물체를 끌어올린다.(그림 1-3-5) 줄의 P쪽은 차뒤켠의 걸개에 매여있다. Q쪽은 물체에 매여져있다. 줄의 전체 길이는 변하지 않고 줄의 질량, 고정도르래의 질량과 크기를 무시한다. 처음에 차는 A점에 있고 줄은 팽팽히 당겨져 수직으로 되여있으며 왼쪽 줄의 길이는 H이다. 차가 왼쪽으로 수평길을 따라 A에서 B를 거쳐 C를 향하여 가

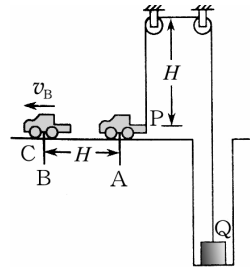



그림 1-3-5

속운동을 한다. AB의 거리를 H, B점을 지날 때의 속도는 v_B 이다. 차가 A에서 B까지 이동해가는 과정에 줄 Q쪽의 끌힘이 물체에 대해 수행한 일을 구하여라.

7. 질량이 m인 철판이 수직으로 선 가벼운 용수철의 웃쪽에 련결되여있고 용수철의 아래쪽은 땅면우에 고정되여있다. 평형일 때 용수철이 줄어든 길이는 x_0이다. 한 물체가 이 철판우에서부터 우로 거리 $3x_0$인 점 A에서 자유락하한다.(그림 1-3-6) 이 물체가 철판을 때리고 철판과 함께 아래로 운동한다. 이때 물체와 철판이 붙지는 않는다. 그것들이 제일 아래점에 도달하였다가 다시 우로 운동하여(물체의 질량은 m이다.) O점에 도달할수 있다. 만일 물체의 질량이 m이라면 이것을 자유락하시켰을 때 물체와 철판이 O점에 도달했을 때에도 웃방향속도를 가지게 된다. 물체가 웃방향으로 운동하여 도달하는 최고점과 O점사이 거리를 구하여라.

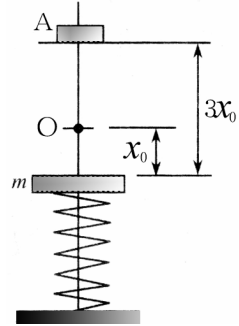



그림 1-3-6

II

8. 용기의 공기를 일부 뽑아내여 압력을 P로 떨구었다. 용기우에 작은 구멍이 있는데 마개로 막아놓았다. 이제 마개를 열면 공기가 처음에 얼마만한 속도로 용기속으로 들어가겠는가?(외부공기 압력은 P_0, 밀도 ρ)

9. 미끄러운 수평면의 량쪽에 수직으로 세운 두 벽 A, B가 있다. 튐성결수가 k인 용수철의 왼쪽 끝을 A벽에 고정시키고 오른쪽 끝에는 질량이 m인 물체 1을 매달았다. 외부힘을 리용하여 용수철을 압축하면서(튐성한계내에) 물체 1을 평형자리 O로부터 왼쪽방향으로 S_0만큼 이동시켰다. 그리고 질량이 m인 물체 2를 물체 1에 붙여놓았다. 정지상태에 있던 물체 1과 2는 외력을 없애면 용수철의 작용으로 하여 오른쪽 방향으로 미끄럼운동을 하게 된다.

1) 어느 자리에서 물체 1와 2가 갈라지겠는가? 갈라질 때 물체 2의 속도는 얼마인가?

2) 물체 2은 물체 1와 갈라진 후에 계속 미끄러져 B벽과 완전 튕성충돌을 일으킨다. B벽과 O사이의 거리 x는 어떤 조건을 만족하여야 하는가? 물체 2이 되돌아와서 O점에서 1와 서로 만날수 있는가? 용수철의 질량과 물체 1와 2의 크기를 모두 무시하여라.

10. 질량이 m인 똑같은 2개의 작은 강철구들을 길이가 $2l$인 늘어나지 않는 끈으로 수평미끄럼판우에 매놓았다. 수평힘 F가 끈의 중심에 수직으로 작용하여 정지상태에 있던 구들이 모아지게 한다.(그림 1-3-7) 강철구들이 충돌하기 전까지의 시간과 두 구들이 수직으로 작용하는 힘 F방향의 속도성분은 각각 얼마인가?

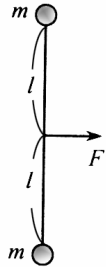



그림 1-3-7

11. 길이가 l인 미끄러운 관이 공중의 두 점 A, B에 설치되여있다. 이 두 점의 높이차는 h이다.(그림 1-3-8) 전체 관안에 끈이 놓여있는데 A점에서 끈을 잡아당기고있다. 끈을 놓는 순간에 끈의 처음 가속도는 얼마인가?

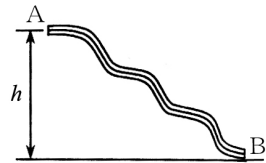



그림 1-3-8

12. 1) 질량이 m인 인공지구위성이 반경이 r_0인 원자리길을 따라 돌고있다. 지구질량이 M일 때 위성의 력학적에네르기 E를 구하여라.

2) 위성이 항행중 미세한 마찰저항력 f(상수량)를 받으면 완만한 라선형자리길을 따라 운동하다가 지구로 접근한다. f가 작아서 자리길의 반경변화가 매우 완만하다. 매 주기마다 회전운동을 근사적으로 반경이 r인 원자리길운동으로 처리하며 다만 r가 점점 짧아진다고 본다. 반경이 r인 자리길에서 한바퀴 돌 때 r의 변화량 Δr와 위성의 운동에네르기 E_k의 변화량 ΔE_k를 구하여라.

13. 물에 뛰여들기선수가 물면으로부터 높이 H=10m인 도약대우에서 자유락하한다. 선수의 질량은 m=60kg이다. 이 선수가 뛰여드는것을 길이가 L=1m, 직경 d=0.3m인 원기둥체가 물에

떨어지는것으로 볼수 있다. 공기저항은 무시한다. 원기둥체의 아래쪽 면에 작용하는 물의 저항힘 f의 값은 들어간 물깊이의 변화에 따르는 함수곡선과 같다.(그림 1-3-9) 이 곡선을 근사적으로 타원의 한 부분이라고 생각할수 있는데 긴 반경, 짧은 반경은 각각 자리표축 Oy 및 Of와 같다. 타원은 y축과 $y=h$에서 사귀며 f축과는 $f=\frac{5}{2}mg$에서 사귄다. 운동선수의 안전을 담보하기 위해서는 물의 깊이 h가 얼마로 되여야 하는가를 계산하여라.(물의 밀도 $\rho=10^3$kg/m^3)

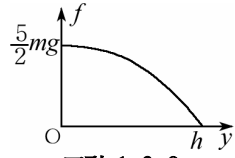



그림 1-3-9

14. 두대의 꼭같은 우주비행선이 각각 그에 장비된 로케트발동기에 의하여 지구둘레를 따라 돌고있는 우주정류소에서 발사된다. 비행선 A는 태양계를 벗어날수 있고 비행선 B는 태양의 중심으로 떨어질수 있다. 로케트의 동작시간이 서로 같다면 비행선 A에 비행선 B보다 더 큰 출력의 로케트발동기가 요구된다는것을 증명하여라.(태양둘레를 도는 지구의 자리길을 원둘레이며 우주정류소와 지구의 상대속도는 무시한다. 로케트가 분사하는 연료의 질량도 무시한다.)

15. 반경이 R이고 질량이 서로 같은 3개의 작은 구가 매끄러운 수평책상우에 놓여있다. 늘어나지 않는 고무줄을 리용하여 그것들을 한 곳에 모아놓았다. 그림 1-3-10과 같이 반경은 R이고 질량은 작은 구의 질량의 3배인 구를 3개의 구우에 올려놓았다. 고무줄때문에 3개의 작은 구들은 분리되지 않는다.

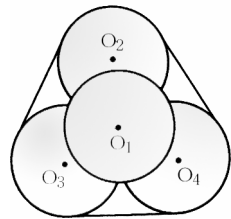



그림 1-3-10

1) 우에 작은 구를 올려놓은 후에 고무줄의 장력은 증가한다. 이 증가량 ΔT를 구하여라.

2) 고무줄을 자른 후 우에 놓았던 구가 떨어지면서 책상면에 부딪칠 때의 속도 v를 구하여라.

제4장. 힘덩이와 운동량

Ⅰ

1. 그림 1-4-1에서 보여준 수평책상면우에 놓여있는 물체 A, B는 질량이 꼭같은 작은 나무토막들이다. 이것들의 벽과의 거리는 각각 L, l이고 책상면과의 미끄럼마찰결수는 각각 μ_A, μ_B이다. 이제 A에 어떤 처음속도를 주어서 책상면우의 오른쪽으로부터 왼쪽으로 운동시킨다. A와 B사이, B와 벽사이의 충돌시간이 아주 짧다고 가정하고 충돌할 때 총운동에네르기의 손실이 없다고 가정한다. 만약 나무토막 A가 마지막에 책상면우에서 떨어지지 않게 하려면 A의 처음속도는 최대로 얼마를 초과할수 없는가?

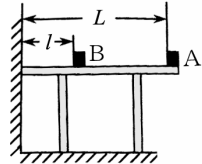



그림 1-4-1

2. TV수상관안에서 전자는 $E=1.8\times10^4$eV의 운동에네르기로 TV 형광막에 부딪친다.

1) 전자가 형광막에 부딪칠 때의 속도 v를 구하여라.

2) 전자들이 끊임없이 TV형광막에 부딪칠 때의 등가전류값이 $I=20$mA이며 부딪친 전자들은 모두 형광막에 흡수된다고 하자. 전자들의 흐름에 의해 형광막이 받게 되는 평균충격힘 F는 얼마인가?(전기소량 $e=1.6\times10^{-19}$C, 전자의 질량 $m=9\times10^{-31}$kg)

3. 승용차앞자리에는 안전기구가 설치되여있다.(그림 1-4-2) 기구안에 어떤 물질이 들어있는데 일단 충격을 받으면 즉시 기체로 분해되여 기구를 신속히 팽창시킨다. 그래서 사람과 앞유리, 운전대사이를 채워서 사람이 상하는것을 방지한다. 시험할 때에 차의 속도는 144km/h, 운전수가 기구와 부딪친 후 0.2s 지나서 정지된다. 사람이 기구와 충돌한 부분의 질량은 40kg, 머리와 가슴부위가 기구와 작용한 면적은 700cm^{2}이다. 이런 때에 사람의 머리와 가슴부위가 받는 평균압력은 얼마

그림 1-4-2

인가?

4. 두명의 어린이 ㄱ, ㄴ가 썰매를 타고 수평얼음판우에서 놀고있다. 어린이 ㄱ와 썰매의 질량을 합하여 M=30kg, 어린이 ㄴ와 썰매의 질량을 합해서도 역시 M=30kg이다. 유희를 놀 때 어린이 ㄱ는 질량이 m=15kg인 통을 v_0=2m/s의 속도로 밀고나가고 어린이 ㄴ는 이와 같은 속도로 맞받아나간다. 서로의 충돌을 피하기 위하여 어린이 ㄱ는 갑자기 통을 어린이 ㄴ에게 밀어보내는데 통이 어린이 ㄴ에 이르면 이 어린이가 그것을 붙잡는다. 만약 얼음판의 마찰력을 무시하며

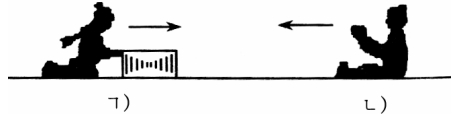



그림 1-4-3

1) 어린이 ㄱ 가 얼마의 속도(땅면에 상대적으로)로 통을 밀어 보내야 어린이 ㄴ와의 충돌을 피할수 있는가?
2) 어린이 ㄱ가 통을 밀어보낼 때 통에 대하여 얼마만한 일을 수행했는가?

5. 그림 1-4-4와 같이 사람들이 x축의 수평자리길 옆에 한줄로 서있다. 원점 O의 량쪽에 서있는 사람들의 번호를 n(n=1, 2, 3, …)으로 표시한다. 매 사람들이 모래주머니를 한개씩 가지고있는데 $x>0$쪽의 사람들이 가지고있는 모래주머니질량은 m = 14kg이며 $x<0$쪽에 서있는 사람들의 모래주머니질량은 m' = 10kg이다. 질량이 M=40kg인 소형차가 어떤 처음속도를 가지고 원점을 출발하여 x축의 정의 방향으로 미끄러져간다. 자리길의 저항힘을 무시한다. 차가 매 사람들의 옆을 통과할 때 이 사람들은 모래주머니를 수평속도 u로 차와 반대되는 방향으로 차적재함에 던져넣는다. u의 속도는 모래주머니를 던지는 순간의 차속도의 $2n$배이다.(n은 사람의 번호)

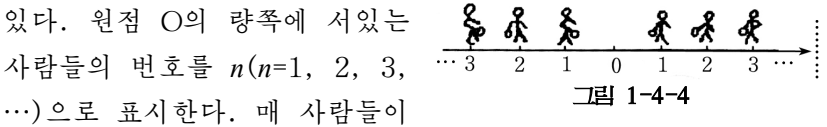



그림 1-4-4

1) 빈차가 출발한 후 차의 적재함에 몇개의 모래주머니가 실리면 차가 반대방향으로 움직이겠는가?
2) 최종적으로 차에는 크고작은 모래주머니가 몇개나 실리겠는가?

6. 질량이 M=100kg인 한대의 평판차가 수평길우에 멎어있다. 차평판으로부터 땅면까지 h=1.25m이다. 질량이 m=50kg인 작은 물체가 차의 평판우에 놓여있다. 이 물체와 차뒤까지의 거리는 b=1m이고 물체와 차판사이의 미끄럼마찰결수는 μ=0.2이다.(그림 1-4-5) 이제 평판차에 대하여 수평방향으로 일정한 힘을 주어서 차를 앞으로 운전했는데 결과 물체가 차판우에서 미끄러져 떨어졌다. 물체가 차판우에서 떨어지는 순간 차가 앞으로 운전해간 거리는 S_0=2m이다. 물체가 떨어질 때 떨어진 지점으로부터 차뒤까지의 수평거리 S를 구하여라. 수평길과 평판차 및 바퀴축사이의 마찰을 무시하여라.(g=10m/s^{2}으로 하여라.)

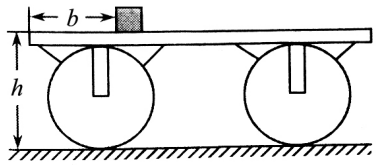



그림 1-4-5

7. 그림 1-4-6과 같이 질량 M이고 길이가 l인 긴 나무판자가 미끄러운 수평땅면우에 놓여있고 그 오른쪽 끝에 질량이 m인 작은 나무토막 A가 있다. 여기서 $m<M$이다. 이제 땅면을 기준계로 하고 A와 B에 크기가 같고 방향이 서로 반대인 처음속도를 준다. A는 왼쪽으로 운동을 하고 B는 오른쪽으로 운동을 하지만 마지막에 A가 나무판으로부터 떨어지지 않는다. 땅면을 기준계로 본다.

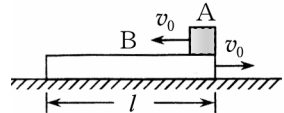



그림 1-4-6

1) A와 B의 처음속도의 크기가 v_0이라고 하면 그것들의 맨 마지막속도의 방향을 구하여라.
2) 처음속도가 알려지지 않았다면 작은 나무토막 A가 왼쪽으로 운동하여 도달한 위치와 처음위치사이의 거리를 구하여라.

II

8. 질량이 M=800kg인 직승기가 프로펠라를 회전시켜 주변의 S=30m^{2}면적안의 공기를 속도 v_0으로 아래로 운동시킨다. 직승기가 공기중에 정지되여있다. 공기의 밀도가 ρ_0=1.2kg/m^{3}로 주어지면 v_0의 크기와 발동기의 일능률 N을 계산하여라.

9. 질량이 m인 미끄러운 퇵성덩어리가 역시 질량이 m인 직각함 안에 놓여있는데 마찰없이 운동을 한다. 함은 얇은 기름층을 바른 책상우에 놓여있다. 함과 책상면사이의 미끄럼마찰결수는 함이 책상면을 따라 운동하는 속도 v에 의해 결정된다. 이 마찰력의 크기는 $f=-\gamma v$이다. 처음에 함이 정지되여있고 덩어리가 함의 왼쪽 벽에 붙어있다가 속도 v_0으로서 오른쪽으로 운동한다. 미끄러운 덩어리와 함사이에 몇차레의 충돌을 일으키겠는가?(함의 길이 l은 덩어리에 비해 훨씬 크다.)

10. 그림 1-4-7과 같이 한 원통이 수직으로 놓여있으며 안벽은 매끈매끈하다. 그리고 질량이 M인 원형뚜껑이 벽에 붙어서 아래우로 이동할수 있다. 원형뚜껑과 밑부분사이에 질량이 m인 작은 구가 있다. 어떤 순간 밑면으로부터 높이가 h인 곳에서 작은 구와 뚜껑사이에 완전퇵성충돌이 일어나서 뚜껑은 웃방향으로 최대높이까지 올라갔다가 다시 원래의 높이 h로 되돌아온다. 다시 이미 밑면과 완전퇵성충돌을 일으키고 되돌아온 작은 구와 부딪치는데 이런 운동이 반복된다. 이런 왕복운동이 이루어지려면 작은 구가 충돌전에 얼마의 속도를 가져야 하는가?

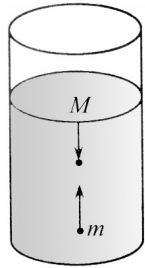



그림 1-4-7

11. 가벼운 용수철의 한쪽을 벽에 고정하고 다른 쪽은 질량이 M인 작은 차에 련결되여있는데 작은 차는 미끄러운 수평면에서 운동한다.(그림 1-4-8) 차가 용수철이 변형되지 않았을 때의 O점으로부터 왼쪽으로 l_0만큼 떨어진 위치에서 운동을 시작한다. 매번 O점을 통과할 때 웃쪽에서 차안에 질량이 m인 물방울을 떨군다. 물방울이 차안에 n개방울 들어간 후에 차가 O점으로부터 제일 멀리 떨어지는 거리를 구하여라.(차안의 물의 진동은 무시한다.)

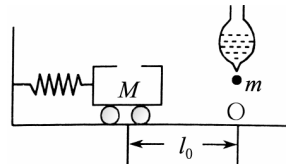



그림 1-4-8

12. 늘어나지 않는 가는 끈의 한끝은 천정우의 C점에 고정되여있고다른 끝에는 질량이 m인 작은 구가 매달려서 수직축둘레로

ω의 각속도로 등속원운동을 한다. 가는 끈과 수직축사이의 각은 θ이다.(그림 1-4-9) A, B가 원의 어떤 직경의 량끝점이라면 작은 구가 A점으로부터 B점까지 운동하는 과정에 가는 끈에 작용하는 장력은 얼마로 되는가?

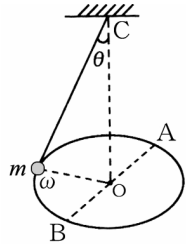



그림 1-4-9

Ⅲ

13. 그림 1-4-10과 같이 질량이 m인 꼭같은 4개의 질점이 길이가 같고 늘어나지 않는 가벼운 실로 련결되여 수평미끄럼판우에 등변4각형 ABCD로 정지되여있다. 갑자기 매우 짧은 시간동안에 A에 CA방향으로 충격을 준다면 충격이 끝나는 순간 질점 A의 속도는 v이고 기타 질점들도 일정한 속도를 얻게 된다. $\angle BAD=2\alpha$ ($\alpha<\pi/4$)이다. 질점계가 충격을 받은 후에 가지게 되는 전체 운동량과 전체 에네르기를 구하여라.

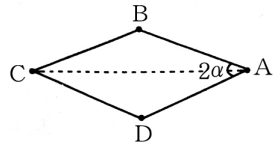



그림 1-4-10

14. 반경이 R이고 질량이 M인 고르로운 강체원고리가 처음에 미끄러운 수평책상면우에 정지되여있다.(그림 1-4-11) 원고리에 작은 구멍 P 가 있고 책상면우에 질량이 m인 질점이 있는데 작은 구멍으로 자유롭게 드나들수 있다. 처음에 질점이 처음속도 v_0으로 구멍 P로 입사하여 원고리안벽과 N번 튕성충돌한 후에 다시 작은 구멍 P로 나온다. 원고리안벽은 미끄럽다고 가정한다. 질점이 작은 구멍으로 들어갔다가 다시 나올 때까지의 과정에 원의 중심 O와 질점을 련결하는 선이 원고리에 대해 상대적으로 360° 회전한다. 질점이 작은 구멍에서 나온 후 책상면에 대한 원고리의 상대속도는 얼마인가?

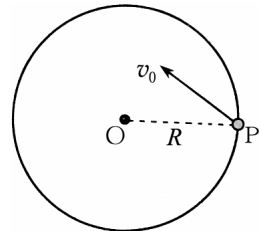



그림 1-4-11

15. 그림 1-4-12와 같이 질량이 m인 직6면체상자가 미끄러운 수평땅면우에 놓여있다. 상자안에 질량이 m인 작은 미끄러운 물체가 놓여있는데 이 물체와 상자밑면사이에는 마찰이 없다. 처음에 상자가 정지되여 움직이지 않고 물체가 일정한 속도 v_0으로 상자의 A벽에서 B벽으로 미끄러져간다. 물체가 상자벽과 매번 충돌할 때마다 상자와 물체의 상대속도의 크기는 충돌전 상대속도의 e배이다. 여기서 $e=\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$이다. 물체와 상자로 이루어진 계의 총운동에네르기가 조금씩 손실되는데 이때 손실되는 에네르기가 처음에 계가 가졌던 운동에네르기의 40%를 초과하지 않게 하려면 물체와 상자가 최대로 몇번 충돌해야 하는가?

그림 1-4-12

제5장. 천체의 운동

I

1. 우리 나라는 동서방향으로 동경 124°～131° 사이에 놓여있다. 때문에 정지통신위성을 발사하려면 적도상공에서 높이가 3만 6천km이면서 우에서 지적한 동경범위구역안에 놓이게 하여야 한다. 가령 발사된 위성이 적도상공에서 3만 6천km, 동경 127°의 위치에 가닿았다고 하자. 이것을 동경 128° 위치에 옮겨놓으려면 위성에 설치된 소형분사식발동기를 짧은 시간동안 가동시켜 위성의 고도를 변화시킴으로써 그의 주기를 조종하여 계획된 경도우에 옮겨놓은 다음 또다시 발동기를 짧은 시간동안 가동시켜 위성의 고도를 다시 변화시켜 제위치에 옮겨놓아야 한다. 이 두 차례의 고도조종방향의 순차는 (　)이다.

1) 아래방향, 아래방향

2) 웃방향, 아래방향

3) 웃방향, 웃방향

4) 아래방향, 웃방향

2. 관측자료에 의하면 어떤 행성의 바깥둘레에 불투명한 고리가 있는데 이 고리가 련속체인가 아니면 위성무리인가를 판단하기 위하여 고리에서 매 층의 선속도 v와 이 층으로부터 행성중심까지의 거리 R를 계산해냈다. 아래의 판단에서 정확한것은 ( )

1) v와 R가 비례한다면 고리는 련속체이다.

2) v와 R가 거꿀비례하다면 고리는 련속체이다.

3) v^2과 R가 거꿀비례한다면 고리는 위성무리이다.

4) v^2과 R가 비례한다면 고리는 위성무리이다.

3. 그림 1-5-1은 우주탐사기구의 겉모양을 그린것이다. 그림에서 P_1, P_2, P_3, P_4은 4개의 분사식발동기인데 P_1, P_3은 공간에 고정된 자리표계의 x축과 평행을 이루는 선이며 P_2, P_4은 y축과 평행을 이루는 선이다. 매 발동기들은 발동을 걸 때 탐사기에 추진력을 주지만 기구를 회전시킬수는 없다. 처음에 탐사기는 일정한 속도 v_0을 가지고 x축의 정의 방향으로 평행이동하다가 다시 y축의 부의 방향으로 60° 만큼 변화시킨다. 그렇다면 ( )

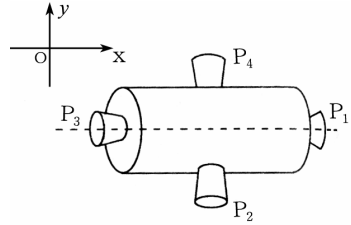



그림 1-5-1

1) 먼저 P_1를 적당한 시간동안 시동시키고 다시 P_4를 적당한 시간동안 시동시킨다.

2) 먼저 P_3을 적당한 시간동안 시동시키고 다시 P_2를 적당한 시간동안 시동시킨다.

3) P_4를 적당한 시간 시동시킨다.

4) 먼저 P_3을 적당한 시간동안 시동시키고 다시 P_4를 적당한 시간동안 시동시킨다.

4. 서로 먼 거리에 떨어져있는 두 행성 A와 B의 겉면근방에서 각각 위성 a와 b를 발사하였다. 행성 A를 도는 위성 a의 주기는 T_a이고 행성 B를 도는 위성 b의 주기는 T_b이다. 이 두 행성의

밀도비는 $\rho_A : \rho_B = (\quad)$이다.

5. 두개의 별이 쌍별로 이루어져있다. 그것들호상간에 만유인력이 작용하는데 두 별을 련결한 선우의 어떤 점은 주기가 같은 등속원운동을 한다. 현재 관측에 의하면 두 별의 중심사이 거리는 R이고 그 운동주기는 T로 측정되였다. 이 두 별의 전체 질량을 구하여라.
6. 미래의 사람들은 지구를 떠나 우주에 가서 생활할수 있다. 어떤 사람이 우주촌을 설계하였는데 그것은 원고리형의 밀페된 건축물이다.사람들은 원고리의 변두리우에서 생활한다. 사람들이 그 속에서 무중력감을 느끼지 않도록 하기 위하여 원고리를 중심축을 따라 회전시키게 되여있다. 이 우주촌의 직경이 200m라고 하며 그것이 중심축을 따라 돌아가는 속도가 얼마일 때 사람들은 지구에서 생활할 때와 같이 중력 g=10m/s^{2}를 받는것처럼 느끼겠는가? 한번 우주촌을 설계해보아라.
7. 어떤 별의 자전주기가 T이고 그것의 북극과 남극에서 용수철저울을 리용하여 어떤 물체의 무게를 재였더니 W였다. 이 물체의 무게를 적도상에서 알아보니 W'였다. 이 별의 평균밀도 ρ를 구하여라.

II

8. 1054년에 큰새별폭발이 지구우에서 관측되였는데 이 폭발이 있은 후에 큰새별은 1731년에 망원경으로 게모양별구름으로 관측되였다. 큰새별의 폭발후 사방으로 던져진 물체들이 게모양을 형성하였기때문에 이렇게 불렀던것이다. 1920년에 그것이 지구우의 관찰자에 대하여 펼친 각도는 360″였다. 이 판단에 의하면 게모양별구름은 지구우의 관찰자에 대하여 펼쳐진 각도는 매해 약 0.42″ (약 2×10^{-6}rad)씩 증가한것으로 된다. 이것과 지구사이 거리는 5 000ly이다. 큰새별폭발은 실지 B.C. ☐년에 일어났고 폭발에 의하여 물체가 던져진 속도는 ☐m/s이다.
9. 어떤 3계단로케트는 질량이 M = 60kg인 운반로케트와 질량이

$m = 10\text{kg}$인 선체보호부인 원뿔형물체로 구성되여있다. 원뿔형물체뒤에는 압축된 용수철이 설치되여있다. 지구우에서 실험할 때 로케트에 고정된 용수철에 의해 원뿔체가 $v_0 = 5.1\text{m/s}$의 속도를 얻게 한다. 만일 원뿔체와 로케트가 궤도에서 분리된다면 그것들의 상대속도는 얼마인가?

10. 중성자별에 관한 문제: 중성자별은 항성이 변화되여 마지막에 도달하게 되는 한가지 형식의 별이다.

1) 밀도가 고르로운 별이 있는데 각속도 ω로 자체의 기하학적 대칭축 주위로 자전하고있다. 그 겉면의 물질은 빠른 속도로 회전하기때문에 생기는 원심력과 만유인력이 평형을 이루므로 유지된다. 별의 최소밀도는 얼마로 되여야 하는가?

2) 게모양별구름속에 있는 중성자별이 1s동안에 30회 돈다. 이 중성자별의 최소밀도를 대략 계산하여라.

3) 만일 이 중성자별의 질량이 태양의 질량정도라면($2\times 10^{30}\text{kg}$) 그것의 최대반경은 얼마로 되겠는가?

11. 질량이 1g인 두개의 질점이 거리 10m 떨어져있다. 처음에 두 질점이 상대적으로 정지되여있고 그중 한개 질점은 고정되여있다. 그것들사이에 만유인력만이 작용한다면 처음속도없이 고정되지 않은 질점이 얼마만한 시간이 지나서 고정된 질점에 와서 부딪치겠는가?

12. 그림 1-5-2와 같이 지구겉면에서 수직방향과 각 α를 지어서 질량이 m인 미싸일을 발사한다. 그의 처음속도는 $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$, M은 지구의 질량, R는 지구의 반경이다. 공기저항과 지구자전의 영향을 무시할 때 미싸일이 올라가는 최대높이를 구하여라.

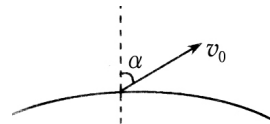



그림 1-5-2

Ⅲ

13. 천체망원경을 통하여 오랜 기간 관측하면서 사람들은 우주에서

수많은 쌍둥이별계를 발견하였다. 그것에 대한 연구를 통해 우주속에서 물질의 존재형식과 분포상태에 대하여 비교적 깊이 알게 되였다. 쌍둥이별계는 두개의 별로 구성되였으며 매개 별의 크기는 두 별사이의 거리에 비해 매우 작다. 일반적으로 쌍둥이별계는 다른 별들로부터 멀리 떨어져있으므로 고립계로 볼수 있다. 어떤 한 쌍둥이별계를 관찰한데 의하면 계의 매개 별의 질량이 둘다 M이고 두 별사이 거리가 L이며 이 두 별을 련결하는 직선의 중심을 기준으로 원운동을 한다.

1) 이 쌍둥이별계의 운동주기 T_0을 구하여라.

2) 실험적으로 관측한 운동주기가 T라면 $T : T_0 = 1 : \sqrt{N}$ ($N > 1$)이다. T와 T_0이 서로 다르다는것을 해석하기 위하여 현재 다음과 같은 리론이 알려져있다. 우주속에는 망원경으로 관측할수 없는 검은구멍이 존재할수 있다. 간단한 가설을 제기하면 이 두 별을 잇는 선을 직경으로 하는 구안에 이런 검은 구멍이 고르롭게 분포되여있는데 구밖의 검은구멍의 영향은 생각하지 않는다. 이 가설과 우에서의 관측결과에 근거하여 이런 검은구멍의 밀도를 구하여라.(별이 운동할 때 검은구멍에 의해 받는 저항힘은 무시한다.)

14. 어느 한 우주비행선이 지구주위를 돌고있는데 자리길은 원둘레이고 적도면우에 있다고 가정하자. 어떤 시각에 우주비행선이 위성 S를 발사하는데 그것들사이는 길이가 L인 강체봉으로 서로 련결된다고 하자. 봉의 질량과 공기와의 마찰은 무시한다. 각 α는 우주비행선과 지구중심사이를 련결하는 직선과 강체봉사이의 각이다.(그림 1-5-3) 위성 S도 지구적도면안에 있고 위성의 질량 m_2이 우주비행선의 질량 m_1보다 매우 작으며 L은 자리길반경에 비해 매우 작다고 가정하자.

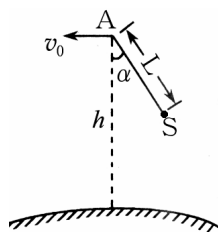



그림 1-5-3

1) 우주비행선과 위성으로 이루어진 계의 배치(지구에 대한) 각 α가 변하지 않도록 할수 있는가? 다시말하면 α가 어

떤 값을 취할 때 그것이 변하지 않게 되겠는가?

2) 매 경우의 평형의 안정성을 론의하여라.

15. 1844년에 뛰여난 수학자이며 천문학자인 베쎌은 씨리우스별의 직선로정으로부터의 운동편차각이 최대로 $\alpha = 2.3°$ 이고 주기 T 가 50년이며 지구우에 있는 관찰자와는 관계없이 시누스곡선을 나타낸다는것을 발견하였다.(그림 1-5-4) 베쎌이 추측한 씨리우스별의 운동자리길의 굴곡은 한개의 작은 짝패별이 존재하기때문이다.(18년후에 직접 관찰되였으며 사실로 되였다.) 만약 씨리우스별의 질량 M 이 $2.3M_{태}$ 이면 짝패별과 태양의 질량비는 얼마이겠는가? ($M_{태}$:태양의 질량) 씨리우스별에서 지구자리길반경 R_0 을 바라보는 각 $\beta = 0.376°$이고 씨리우스별과 그 짝패별의 자리길은 원이며 이 자리길면은 태양계로부터 씨리우스별까지 그은 직선방향에 수직이다.

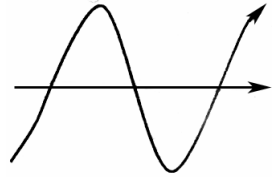



그림 1-5-4

제6장. 물체의 평형

I

1. 반구형태의 물체가 수평면우에 고정되여있다. 구중심의 바로 우에 작은 도르래가 있고 가벼운 끈의 한끝에 작은 구가 매달려서 반구우의 점 A에 기대여있으며 다른 끝은 힘 F로 당기고있다.(그림 1-6-1) 도르래, 작은 구를 질점으로 보고 이제 끈을 천천히 당겨 작은 구를 A점으로부터 B점까지 운동시키는 과정에 작은 구에 대한 반구의 맞선힘 N과 작은 구에 대한 끈의 장력 T 의 크기변화상태는 (   )

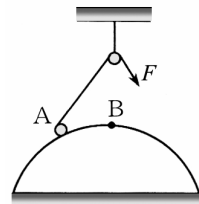



그림 1-6-1

1) N은 크게 변하고 T는 작게 변한다.

2) N은 작게 변하고 T는 크게 변한다.

3) N은 변하지 않고 T는 작게 변한다.

4) N은 작게 변하고 T는 먼저 작게 변한후 크게 변한다.

2. 그림 1-6-2에서 A, B는 서로 같은 고르로운 직6면체벽돌로서 길이가 l이고 함께 쌓여있다. A벽돌이 B벽돌의 오른쪽 끝면에 대하여 $l/4$만큼 나와있다. B벽돌은 수평책상면우에 놓여있으며 벽돌의 오른쪽 끝면과 책상모서리면은 평행이다. 두 벽돌이 모두 떨어지지 않게 유지하려면 B를 책상모서면으로부터 내밀수 있는 길이 x의 최대값은 ( )

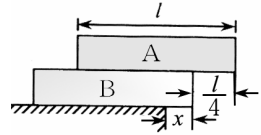



그림 1-6-2

1) $\dfrac{l}{8}$　　2) $\dfrac{l}{4}$　　3) $\dfrac{3l}{8}$　　4) $\dfrac{l}{2}$

3. 가볍고 가는 선에 질량을 모르는 두개의 작은 구가 매달려있다.(그림 1-6-3의 웃그림) 이제 작은 구 a가 30°만큼 왼쪽으로 편차되도록 일정한 힘을 가하고 또 작은 구 b가 오른쪽으로 30°만큼 편차되도록 꼭같은 크기의 힘을 가하면 마지막에는 평형에 도달한다. 평형상태의 그림은 그림 1-6-3의 아래에서 ( )이다.

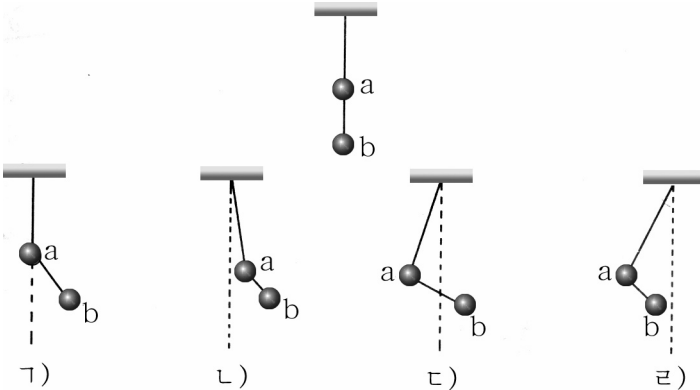



그림 1-6-3

4. 질량이 $m = 50\text{kg}$인 고르로운 원기둥체가 계단옆에 놓여있다. 계단의 높이 h는 원기둥체의 반경 r의 절반이다.(그림 1-6-4) 원기둥체의 제일 웃점 A에 힘을 가하여 원기둥체가 P를 축으로 하여 계단을 굴러올라가게

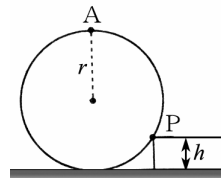



그림 1-6-4

한다.

1) 가해진 힘의 크기를 구하여라.

2) 원기둥체에 대한 계단의 작용힘을 구하여라.

5. 타조는 세계적으로 제일 큰 새이다. 타조가 만일 자기 몸크기에 비례하는 날개를 가진다면 날수 있는가? 생물학적통계로 결론을 내린다면 날수 있는 필요조건은 공기가 올려미는 힘 F가 적어도 몸무게 $G = mg$와 평형을 이루어야 한다. 날개를 펄럭일 때 얻는 올려미는 힘의 크기는 $F=CSv^2$이다. 식에서 S는 날개를 펼쳤을 때 면적, v는 새의 비행속도, C는 비례결수이다. 기하학적으로 근사한 가설을 세우면 새의 기하학직선은 L로 된다. 그러면 새의 질량은 $m \propto L^3$, 날개의 면적 $S \propto L^2$이다. 관측에 의하면 제비의 최소비행속도는 5.5m/s이고 타조의 최대달리기속도는 11.5m/s이다. 그리고 타조의 몸길이는 제비의 25배이다. 그러면 타조가 정말로 자기의 몸크기에 비례하는 날개를 가진다면 날수 있겠는가?

6. 그림 1-6-5는 전동연마반을 리용한 공구연마장치이다. 연마반의 회전축은 그림에서 O점에서 종이면에 수직으로 지나간다. AB는 길이가 $l = 0.6$m, 질량은 $m_1 = 0.5$kg인 고르로운 가는 강체막대기이다. 이 막대기는 A쪽의 고정축주위로 마찰없이 돌아갈수 있다. 공구 C는 AB막대기에 고정되여있고 그 질량은 $m_2 = 1.5$kg이다. 공구중심, 공구와 연마반의 접촉점 P, 그리고 O점은 모두 AB의 중심점을 지나는 수직선우에 놓인다. 점 O로부터 AB까지의 수직거리는 $d = 0.1$m이고 AB는 수평위치를 유지한다. 연마반과 공구사이의 미끄럼마찰결수는 $\mu = 0.06$이다.

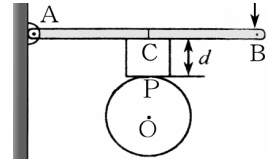



그림 1-6-5

1) 연마석이 정지했을 때 공구가 연마반을 누르는 힘이 $F_0 = 100$N으로 되게 하려면 B끝에 수직아래방향으로 힘 F_B를 얼마만한 크기로 주어야 하는가?

2) 연마반이 시계바늘과 반대방향으로 회전할 때 공구가 연마반

을 누르는 힘이 $F_0 = 100\text{N}$이 되게 하려면 B끝에 수직아래방향의 F'_B는 얼마로 주어야 하는가?

7. 그림 1-6-6과 같이 ABCD는 경사각 $\theta = 30°$인 거친 경사면이고 변 AD와 BC는 평행이다. 경사면우에 무게가 $G = 10\text{N}$인 물체가 놓여있는데 이 물체에 변 AD와 평행인 힘 F가 작용하여 물체를 등속직선운동시킨다. $F = 5\text{N}$이라고 할 때 물체가 받는 마찰력을 구하여라.

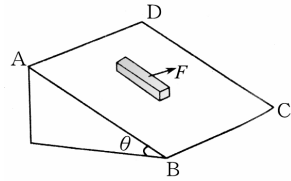
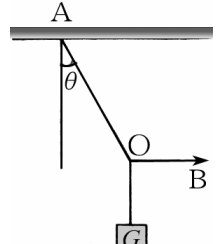



그림 1-6-6

Ⅱ

8. 장력이 T_1인 끈에 무게가 G인 물체가 매달려있다.(그림 1-6-7) 끈의 O점에서 장력이 T_2인 끈 OB를 리용하여 수평으로 천천히 물체를 끌어당긴다. 끈 OA와 드림선방향사이의 각 θ의 최대값은 얼마인가? ($T_1 > T_2$)

그림 1-6-7

9. 정확한 막대기저울이 있다. 이제 눈금을 새긴 직선자를 가지고 저울추의 질량을 측정할 때 그것을 표시하는 공식을 이끌어내고 추의 질량값을 표시하여라.

10. 그림 1-6-8과 같이 원뿔형물체가 수직으로 놓여있다. 원뿔의 정각은 α이다. 질량이 m인 고르로운 쇠고리가 수평으로 원뿔형물체에 감겨져있다. 쇠고리와 원뿔면사이의 마찰력을 무시할 때 쇠고리의 장력을 구하여라.

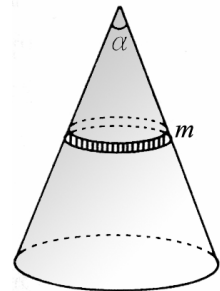



그림 1-6-8

11. 질량이 같은 20개의 직6면체모양의 나무토막들을 하나씩 쌓아서 구멍이 있는 다리를 만든다. 매개 나무토막의 길이는 다같이

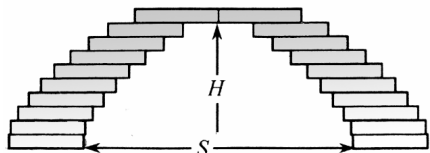



그림 1-6-9

L 이다. 매개 나무토막의 가로자름면은 변의 길이가 $h=\frac{L}{4}$ 인 바른4각형이다. 이 다리의 지지점사이의 거리 S 가 최대로 되도록 그림을 그리고 지지점사이거리와 다리구멍의 높이 H 사이의 비를 구하여라.(그림 1-6-9)

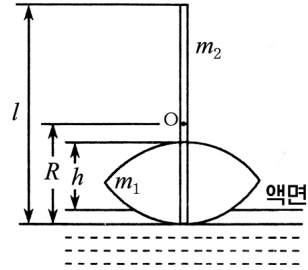



그림 1-6-10

12. 그림 1-6-10과 같이 부표(물에 뜨는 물체로 만든 표식물)가 반경 R 인 두개의 결구로 합쳐져서 이루어졌는데 그 질량은 m_1 이고 중심두께는 h 이다. ($h>2R$) 길이가 l이고 질량이 m_2 인 가는 막대기가 부표의 중심에 수직으로 꽂아져서 그 끝이 아래결구면까지 닿아있다. 가는 막대기의 수직위치가 바로 평형위치이다. 이 평형위치의 안정성을 분석하여라.

III

13. 흐르는 물이 물체를 미는 힘의 크기는 물흐름속도의 2제곱에 비례한다는것이 실험적으로 증명되였다. 물속에서 운반되는 물체의 무게는 물흐름속도의 6제곱에 비례한다. 만일 어떤 강물의 흐름속도가 원래의 2배이며 그가 미는 물체의 무게는 원래의 64배이다. 강흐름속도가 원래의 1/2이라면 그가 떠미는 물체의 무게는 원래의 1/64이다. 류체력학에서 이미 증명된바와 같이 물흐름이 그 흐름방향에 수직인 평판에 작용한 압력은 평판의 면적에 비례하며 물흐름속도의 2제곱에 비례한다. 물에서 운반되는 물체의 무게는 어째서 물흐름속도의 6제곱에 비례하는가?

14. 큰 용기안에 밀도가 ρ_1 인 액체가 들어있다. 그안에 밀면적이 S 인 원통형의 작은 용기가 놓여있는데 밑부분에 길이가 l인 좁은 유리관을 꽂아놓았다.(그림 1-6-11) 작은 용기안으로 밀도가 ρ_2 인 색이 있는 무거운 액체를 넣는다. $\rho_2>\rho_1$ 액체높이가 H

일 때 작은 용기의 안과 밖에는 두가지 종류의 액면이 동일한 수평면을 이루게 된다. 이제 유리관의 아래쪽을 열고 관찰해보면 무거운 액체는 유리관밑으로부터 큰 용기로 흘러나오고 조금 지나서 가벼운 액체가 유리관밑으로부터 작은 용기로 흘러들어간다. 이런 과정이 반복된다. 두 종류의 액체가 혼합되지 않고 겉면장력을 무시할 때

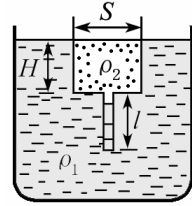



그림 1-6-11

1) 무거운 액체가 처음 작은 용기로부터 흘러나간 질량 Δm_1 는 얼마인가?

2) 가벼운 액체가 매번 작은 용기로 흘러들어간 질량 Δm_n 은 얼마인가?

3) 이후의 매번 순환중에서 작은 용기로부터 흘러나간 무거운 액체의 질량 Δm_k 는 얼마인가?

15. 아래끝이 수평축주위로 회전할수 있는 나무판이 있는데 회전축은 수직벽우에 설치되여있다.(그림 1-6-12) 처음에 나무판과 벽면사이의 각은 θ 이다. 이 각사이에 원기둥형나무굴대가 끼워있는데 그 자름면의 반경은 r이다. 나무판 바깥쪽에서 힘을 주어 평형상태를 유지한다. 그림에서 굴대자름면에 수직웃방향으로 화살표시가 있다. 나무굴대와 벽사이 및 굴대와 나무판사이의 정지마찰결수는 각각 $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0.577$이다. 이제 나무판에 가한 힘 F 를 서서히 감소시키면 사이각이 벌어지면서 나무굴대가 아래로 떨어진다. 사이각이 $60°$ 일 때 나무굴대자름면의 화살표시가 어느 방향을 가리키겠는가? 삼각함수표를 참고하여라.

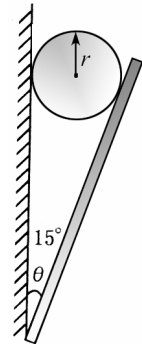



그림 1-6-12

θ	$75°$	$15°$	$30°$	$60°$
$\sin\theta$	0.131	0.259	0.5	0.866
$\cos\theta$	0.991	0.966	0.866	0.5

제7장. 력학적진동과 력학적파동

Ⅰ

1. 용수철진동자가 조화진동을 하는데 주기는 T이다. 그러면(　)

1) t시각과 ($t+\Delta t$)시각에 진동자의 진폭은 서로 같고 방향도 서로 같다. Δt는 꼭 T의 정수배이다.

2) t시각과 ($t+\Delta t$)시각에 진동자의 운동속도의 크기가 서로 같으면 방향은 서로 반대이다.

3) $\Delta t=T$이면 t시각과 ($t+\Delta t$)시각에 진동자의 가속도는 꼭 같다.

4) $\Delta t=\dfrac{T}{2}$이면 t시각과 ($t+\Delta t$)시각에 용수철의 길이는 꼭 같다.

2. S_1와 S_2은 두개의 간섭성파원이다. 그림 1-7-1에서 S_1와 S_2을 중심점으로 하는 두 조의 동심원들을 각각 만들어낸다. 또한 같은 시각에 두개 파동의 마루와 골을 표시한다. 여기서 실선은 파동의 마루를 표시하고 점선은 파동의 골을 표시한다. 그림에서 4각형안에 3개의 점 a, b, c가 표시되여있다. 이 3개의 점들가운데서

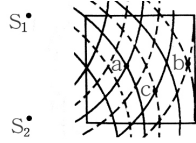



그림 1-7-1

1) 진동이 센 점은 _____이다.

2) 진동이 약한 점은 _____이다.

3. 그림 1-7-2에 쌍선흔들이를 보여주었다. 그것은 수평천정우에 두개의 길이가 같은 가는 끈으로 작은 구를 매달고있는 구조로 되여있다. 끈의 직경을 무시할수 있고 l와 α가 알려진것으로 보면 작은 구가 종이면에 수직으로 조화진동을 할 때 주기는 얼마인가?

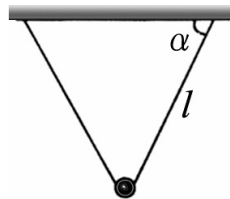



그림 1-7-2

4. 그림 1-7-3에서 ㄱ는 연기로 꺼멓게 그슬려놓고 가는 선으로 달아맨 금속편과 왼쪽꼭대기우에 가는 강철바늘을 용접해놓은 음차를 보여준다. 음차는 진동수 f_0으로 진동한다. 정지했을

때 바늘끝은 금속편의 자리표계원점을 가리킨다. 음차를 가볍게 두드리면 진동하기 시작한다. 가는 선을 불로 태우면 금속편이 자유락하하기 시작한다. 이때 바늘끝은 금속편우에 흔적을 그린다.(음차의 진폭은 변하지 않는다고 본다.)

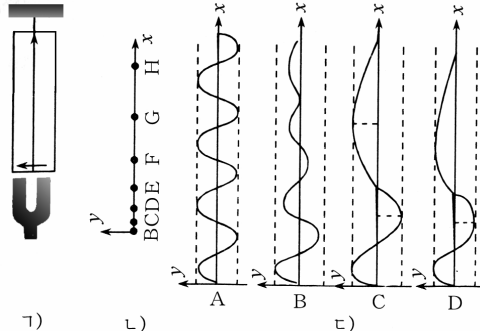



그림 1-7-3

1) 그림 ㄴ는 금속편우에 뚜렷한 흔적을 나타내는 자리표축파의 련이은 7개의 교차점들을 택하여 차례로 B, C, D, E, F, G, H로 기록하고 서로 린접한 두 점사이의 자리를 b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6으로 표시한 후 《점차근사법》을 써서 중력가속도 g의 수학적표현식을 써보아라.

2) 그림 ㄷ의 4개 그림중에서 그림 ☐이 금속편우에 남긴 바늘의 흔적을 가장 정확히 표시한다.

3) 달아맨 가는 선이 불에 타서 끊어진 순간부터 진동이 시작된다고 보면 강철바늘이 평형자리를 통과하여 왼쪽방향으로 운동할 때 왼쪽 방향변위를 정의 방향으로 취하며 강철바늘의 진폭을 A로 한다. 그러면 강철바늘의 수평변위 y와 금속편이 떨어지는 높이사이의 함수관계식은 ☐이다.

5. 실선과 점선은 파장과 진폭이 서로 같은 두개의 조화가로파를 표시하는데 같은 팀성줄우에서 각각 왼쪽, 오른쪽으로 전파한다. 어떤 시각에 두개 파동의 위치가 그림 1-7-4와 같다. 점 P, Q, S는 팀성줄우의 세 질점의 평형자리이다. 다음의 설명중에서 정확한것을 지적하여라.

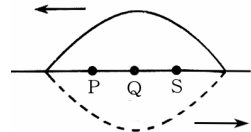



그림 1-7-4

1) 이 시각에 P, Q, S는 모두 제각기 평형자리에 있으며 진동

도 모두 제일 약하다.

2) 이 시각에 P, Q, S는 모두 제각기 평형자리에 있으며 다만 Q의 속도가 최대로 된다.

3) 이 시각 P의 속도는 우로 향하며 Q의 속도는 령이고 S의 속도는 아래로 향한다.

4) 이 시각 P의 속도는 아래로 향하고 Q의 속도는 령이며 S의 속도는 우로 향한다.

6. 한개의 조화파동이 x축우로 전파되는데 파동속도는 50m/s이다. $t=0$시각의 파형을 그림 1-7-5의 ㄱ에 보여주었다. 그림에서 M위치의 질점은 평형자리를 지나 y축의 정의 방향으로 운동한다. $t=0.5$s인 때의 파형을 그림 1-7-5의 ㄴ에 그리여라.(적어도 한개 파장을 그려야 한다.)

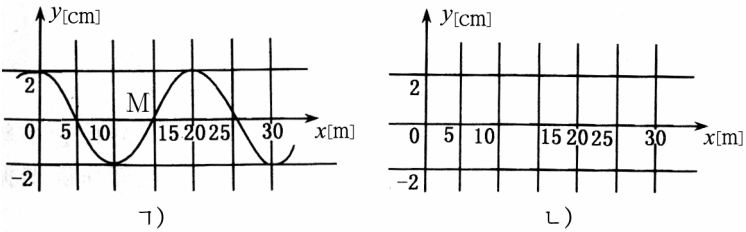



그림 1-7-5

7. 한개의 가로파가 x축우로 전파하고있다. $t_1=0$과 $t_2=0.005$s사이에서의 파형곡선을 그림 1-7-6에 보여준다.

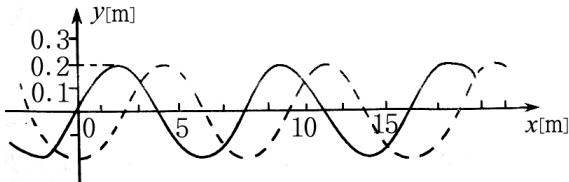



그림 1-7-6

1) 그림을 보고 진폭과 파장을 구하여라.

2) (t_2-t_1)가 한주기보다 작을 때 파동이 오른쪽으로 전파한다면 파동속도는 얼마인가? 또한 왼쪽으로 전파한다고 하면 파동속도는 얼마인가?

3) (t_2-t_1)가 한주기보다 작고 또 파동속도가 6 000m/s라고

하면 파동의 전파방향은 어느쪽인가?

Ⅱ

8. 한개의 용수철진동자가 수직으로 매달려있고 이것과 함께 끝에 가림판을 건 용수철이 나란히 매달려있는데 이것들이 수직방향으로 진동하는 주기는 1s로서 모두 같다. 이제 평행빛을 용수철진동자에 수평방향으로 비쳐준다.(그림 1-7-7) 진동자와 막을 10cm아래로 당겼다가 먼저 막을 놓아주고 Δt 시간 지난 후에 진동자를 놓는다. 그림자의 진폭이 가림판에서 5cm로 되자면 Δt 는 얼마로 되여야 하는가?

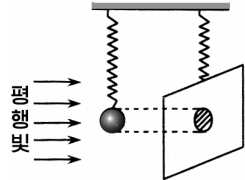



그림 1-7-7

9. 그림 1-7-8에서 보여준것은 기계진동장치이다. 두개의 가벼운 용수철의 튐성결수는 각각 k_1, k_2 이고 자유로운 회전축으로부터 떨어진 거리는 a, b이다. 강체막대기 OAB의 질량은 무시하고 진동자의 질량은 m 이다. 평형을 이룰 때 막대기 OAB는 수평으로 놓여있다. 진동자가 작은 진폭으로 자유진동할 때 그 진동주기는 얼마인가?

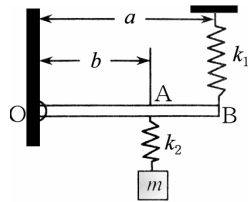



그림 1-7-8

10. 어떤 고층건물의 승강기운전공이 제시간내에 하루일을 끝내기 위하여 승강기안벽에 정확한 추시계를 걸어놓았다. 승강기가 우로 올라갈 때의 가속시간과 내려갈 때의 가속시간은 서로 같으며(정지계에 설치된 시계에 따르면) 가속도의 크기도 서로 같다. 이 승강기운전공이 제시간에 일을 끝낼수 있는가, 아니면 초과하거나 앞당겨서 끝내겠는가?

11. 수학흔들이는 길이가 l인 가벼운 막대기의 끝에 고정된 연추로 이루어졌는데 이제 막대기에 연추질량과 같은 진주를 끼워넣었다. 이 진주는 막대기중심을 지나간 수평선을 따라 자유롭게 움직일수 있다.(그림 1-7-9) 이 흔들이의 작은 진동주기를 구하여라.(마찰은 무시한다.)

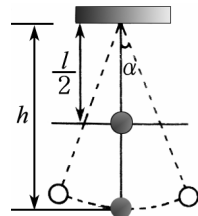



그림 1-7-9

12. 밤에 땅겉면의 온도가 내려간다. 공기중의 온도는 높이에 따라 증가하며 소리속도도 높이에 따라 증가한다. 공기를 수평방향으로 두께가 d 인 얇은 층으로 분할하고 땅면에서 제일 가까운 층에서의 소리의 전파속도를 v_1 라고 하면 n 번째층에서 소리속도는 $v_n = nv_1$ 로 표시된다.

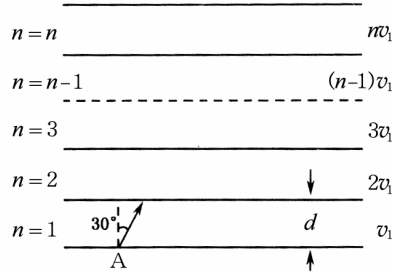



그림 1-7-10

땅면의 A자리에 음원이 있고 수직방향과 30°의 각을 이루는 방향으로 소리파가 복사된다.(그림 1-7-10) 이 소리를 가장 똑똑히 들을수 있는 점에서 A자리까지의 거리는 얼마인가?

Ⅲ

13. 길이가 $l = 2$m이고 질량이 꼭같은 3개의 직선막대기로 바른3각형의 틀 ABC를 만들었다. C점이 미끄러운 수평회전축에 걸려있으므로 틀전체가 이 주위로 회전할수 있게 되였다. 막대기 AB는 궤도이고 그 우에서 다람쥐완구가 운동한다.(그림 1-7-11) 이제 다람쥐가 궤도우에서 운동하는것을 관찰하는데 틀은 정지되여 움직이지 않는다. 다람쥐가 어떤 모양의 운동을 하는가를 밝혀내여라.

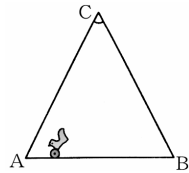



그림 1-7-11

14. 어떤 고층건물의 승강기천정에 길이가 L 인 가벼운 용수철이 매달려있고 그 아래끝에 질량이 $m = 1$kg인 물체가 달려있는데 정지상태에 있을 때 용수철은 $\Delta L = 0.1$m 늘어났다. 어떤 주어진 시각에 승강기가 0.5g의 가속도로 내려오다가 $t = \pi s$ 후에 자동제동에 들어가서 −0.5g의 가속도로 떨어지다가 멈춰선다. 변위그라프를 리용하여 승강기안에 매달린 물체의 운동을 서술하고 진동그라프를 그려보아라.

15. 한개의 큰 용기안에 서로 풀리지 않는 두가지 종류의 액체가 들어있다. 그것들의 밀도는 각각 ρ_1 와 ρ_2 이다.($\rho_1 < \rho_2$) 이제 길이가 L 이고 밀도가 ($\rho_1 + \rho_2$)/2인 나무막대기를 웃쪽의 액

체속에 수직으로 넣는데 그 아래끝이 두 액체의 경계면으로부터 $\frac{3}{4}L$ 만큼 떨어져있다가 정지상태로부터 아래로 떨어지기 시작한다. 나무막대기가 제일 낮은 자리에 도달하는데 걸리는 시간을 구하여라. 나무막대기의 운동으로 인한 액체의 저항을 무시하고 두 액체가 매우 길다고 보아라. 나무막대기는 액체속에서 운동하고있는것으로 즉 액면에 로출되지도 않고 또 용기와 충돌하지도 않는다고 보아라.

제8장. 력학종합문제

I

1. 한대의 떼목이 강기슭을 떠났다. 처음속도는 v 이고 방향은 기슭에 수직이다. 그 운동자리길을 그림 1-8-1에 보여준다. 시간 T 만큼 경과하여 자리길우의 ×부호 있는 곳까지 왔다. 강물의 속도는 u 로 일정하다. 작도법을 리용하여 $2T$, $3T$, $4T$ 시각에 이 떼목의 자리를 자리길우에 표시하여라.

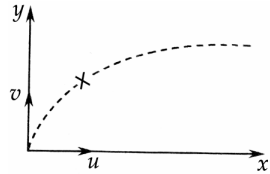



그림 1-8-1

2. 전등이 땅겉면으로부터 높이 l_2, 천정으로부터 l_1 만큼 떨어진 자리에서 폭발하였다. 모든 쪼각들이 똑같은 처음속도 v 로 사방으로 휘뿌려진다. 유리쪼각들이 땅바닥우에 떨어진 반경을 구하여라.(유리쪼각과 천정과의 충돌은 튐성충돌이고 땅바닥과의 충돌은 완전비튐성충돌이며 쪼각들은 벽과 충돌하지 않는다고 본다.)
3. 질량이 $M=12\text{t}$인 우주비행선이 달로부터 높이 $h=100\text{km}$에서 원자리길을 따라 달주위를 돌고있다. 자리길에서 착륙에로 이행할수 있도록 어느 시각부터 발동기를 끈다. 로케트분사구에서 분출되는 기체흐름속도는 $u=10^4\text{m/s}$이다. 달의 반경은 $R_{달}=1$

700km, 달의 겉면까지의 자유락하가속도는 $g_{달} = 1.7\text{m/s}^2$이다.

1) 자리길우의 A점에서 발동기를 껐을 때 비행선이 달의 B점에 떨어지게 하려면 얼마만한 연료를 소비해야 하는가?(그림 1-8-2의 ㄱ)

2) 비행선이 달중심방향으로 향한 운동에네르기를 가지고 달과 서로 접한 자리길우의 점에 가기 위해서는 얼마만한 연료가 소비되야 하는가?(그림 1-8-2의 ㄴ)

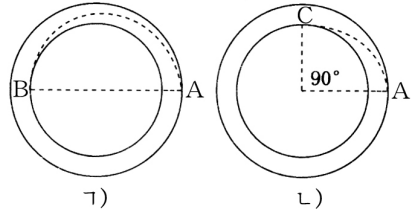



그림 1-8-2

4. 파동을 흡수하지 않는 매질속에 있는 작은 구면파원으로부터 구면파가 복사된다. 파원의 진동은 $y_0 = A_0 \cos 4\pi t$ 이고 반경이 $r_1 = 10\text{m}$인 구면파의 진동은 $y = 2\cos 4\pi\left(t - \frac{1}{8}\right)\text{m}$이다.

1) 이 구면파의 파장을 구하여라.

2) 반경이 $r_2 = 25\text{m}$인 구면우의 임의의 점에서 진동식을 구하여라.

5. 매우 굳은 가벼운 막대기로 작고 무거운 구를 련결하여 《아령》모양을 만들었다. 이것이 속도 v_0으로 정지된 수직벽을 향하여 평행이동하고있다.《아령》축과 벽면사이의 각은 45°를 이룬다.(그림 1-8-3) 《아령》이 벽과 튐성충돌한 후에 어떤 모양의 운동을 하겠는가?

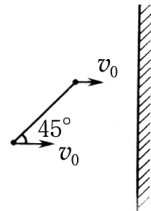



그림 1-8-3

6. 늘어나지 않는 가벼운 선을 리용하여 작은 구를 반경이 r인 정지된 원기둥체에 매놓았다. 처음에 구와 원기둥체는 서로 접해있다. 어떤 시각에 반경방향으로 속도 v를 가지도록 선을 풀어준다.(그림 1-8-4) t시각에 풀어진 선의 길이 l을 구하여라.

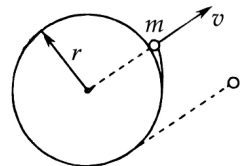



그림 1-8-4

7. 반경이 R인 반구형의 미끄러운 그릇이 수평인 땅면우에 놓여있다. 길이가 $2L$인 가

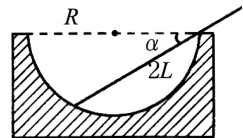



그림 1-8-5

늘고 긴 막대기가 그릇의 안에 놓여있다.(그림 1-8-5) 막대기가 평형상태에 있을때 막대기와 수평면사이의 각 α를 구하여라. 막대기가 평형상태에 놓이게 하려면 막대기길이와 그릇의 반경사이에 어떤 관계가 있겠는가를 설명하여라.

8. 그림 1-8-6과 같이 3개의 물체가 쌓여서 미끄러운 수평면우에 놓여있다. 1은 직4각형모양의 판대기이고 2와 3은 3각형프리즘모양이다. 그것들의 질량은 각각 m_1, m_2, m_3이고 1과 2사이의 경계면 A에서 정지마찰결수는 μ_A, 2와 3사이의 경계면 B에서 정지마찰결수는 μ_B이다. 경계면 B와 수평면사이의 경사각은 θ이다.

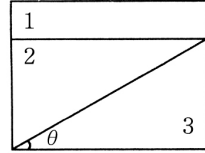



그림 1-8-6

1) 3을 오른쪽으로 끌어당겨서 작은 가속도 a를 가지게 할 때 어떤 경계면에서도 미끄러지는 운동은 생기지 않는다. 경계면 B에서 마찰력의 크기를 구하여라. 매개 경계면에서 정지마찰력과 최대정지마찰력사이의 비를 구하여라.
2) 이제 3의 가속도를 점점 증가시키면 두 경계면중에서 어느 한 경계면이 미끄러진다. 어느 경계면인가? 어떤 정황에서 경계면 A가 먼저 미끄러지겠는가? 어떤 정황에서 경계면 B가 먼저 미끄러지겠는가?
3) 다시 정지로부터 시작하여 왼쪽으로 3을 당겨서 그의 가속도를 점점 증가시키면 미끄러지는 운동이 발생하는데 이때의 미끄러지는 상태를 설명하여라.
4) $\mu_A = 0.5$, $\mu_B = 0.8$로 놓고 θ가 어떤 값일 때 3을 오른쪽으로 당기면 경계면 B에서 먼저 미끄러지는 운동을 일으키는가? 또 왼쪽으로 3을 당길 때 경계면 A가 먼저 미끄러지겠는가?

9. 그림 1-8-7과 같이 질량이 M이고 길이가 L인 얇은 가림판 P를 가진 나무판대기가 수평인 땅면우에 놓여있다.

그림 1-8-7

나무판과 땅면사이의 정지마찰결수와 미끄럼마찰결수는 다같이 μ이다. 질량이 m인 사람이 나무판의 한끝에서 다른끝으로 땅면에

대해 등가속도로 걸어가기 시작한다. 다른끝에 도착했을 때 가림판을 잡고 나무판우에 정지한다. 사람과 나무판사이의의 정지마찰결수는 충분히 크므로 사람과 나무판사이에서는 미끄러짐이 없다. 어떤 조건에서 나무판이 이동한 거리가 최대로 되겠는가?

제9장. 분자운동론, 열과 일, 고체와 액체의 성질, 물질의 상변화

I

1. 두개의 분자 A와 B가 비교적 멀리 떨어져있다. 이때 분자들사이의 호상작용힘은 무시할수 있다. A분자를 고정시켜놓고 B분자를 A분자쪽으로 점차 접근시키면 두 분자를 맞닿을 때까지 접근시킬수가 없다. 이 과정에 대한 다음의 설명들중에서 어느것이 정확한가?
   1) 분자힘이 B분자에 대하여 총적으로는 정의 일을 수행하며 따라서 분자들사이의 호상작용에네르기가 부단히 감소된다.
   2) B분자가 시종일관 분자힘을 극복하면서 일을 하며 따라서 분자들사이의 호상작용에네르기가 부단히 커진다.
   3) B분자가 처음에는 분자힘을 극복하면서 일을 수행하고 그후에는 분자힘이 B분자에 일을 수행하며 따라서 분자들사이의 호상작용에네르기가 처음에는 커지다가 그 다음은 감소된다.
   4) 처음에는 분자힘이 B분자에 대해 일을 수행하고 그 후에는 B분자가 분자힘을 극복하면서 일을 수행한다. 따라서 분자들사이의 호상작용에네르기가 처음에는 작아지다가 그 다음은 커진다.
2. 물체의 내부에네르기 및 그의 변화량에 대한 다음의 설명중에서 어느것이 정확한가?
   1) 물체의 내부에네르기가 변화되면 물체의 온도도 변해야 한다.

2) 물체가 외부계에 일을 할 때 그의 내부에네르기가 꼭 변해야 되는것은 아니다. 물체에 열량이 전달될 때도 그의 내부에네르기는 변하지 말아야 한다.

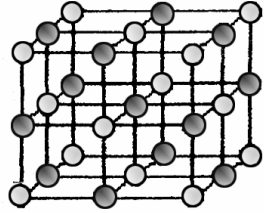



그림 1-9-1

3. 그림 1-9-1에서 보여준바와 같이 소금(NaCl)결정은 Na^+이온 (그림에서 ○)과 Cl^-이온(그림에서 ●)으로 구성되여있다. 이 두가지 종류의 이온들은 공간적으로 서로 수직인 세 방향으로 꼭같은 거리로 배렬되여있다. 소금의 몰질량은 58.5g/mol, 밀도는 $2.2g/cm^3$, 아보가드로수는 $N_A = 6.02\times10^{23}mol^{-1}$이다. 소금결정체에서 가장 가까운 두개의 나트리움이온중심들사이의 거리가 다음 네개의 수값들가운데 어느것에 가장 가까운가?

1) 3.0×10^{-8}cm　　2) 3.5×10^{-8}cm

3) 4.0×10^{-8}cm　　4) 5.0×10^{-8}cm

4. 표준조건에서 공기분자들사이의 평균거리를 구하여라.

5. 교실바닥의 면적이 $15m^2$, 높이 3m이다. 교실안에 들어있는 공기의 질량을 대략 계산하여보아라. 공기의 몰질량은 2.9×10^{-2}kg/mol이다.

6. 물의 밀도는 $\rho = 1.0\times10^3 kg/m^3$, 물 1mol의 질량은 $M = 1.8\times10^{-2}$kg/mol이다.

1) 물 $1cm^3$안에는 물분자가 몇개나 들어있는가?

2) 물분자가 구모양이라고 볼 때 물분자 하나의 직경은 얼마인가?

7. 다음의 내용을 읽고 질문에 대답하여라.

자연계에 있는 물체들은 일정한 온도를 가지고있으므로 외부계로 부단히 전자기파를 복사하고있다. 이러한 복사가 온도와 관계되기때문에 열복사라고 부른다. 열복사는 다음과 같은 특징을 가지고있다.

첫째로, 열복사되는 에네르기속에는 각이한 파장의 전자기파의 에네르기들이 포함되여있다.

둘째로, 물체의 온도가 높을수록 단위시간당, 물체의 단위겉면

으로부터 복사되는 에네르기가 많아진다.
셋째로, 복사되는 전체 에네르기에서 각이한 파장의 전자기파에
　　　　해당되는 에네르기몫이 서로 다르다.
일정한 온도를 가지고있는 물체들은 외부계에 전자기파형식으로 에네르기를 복사함과 동시에 다른 물체들이 복사하는 전자기파를 흡수한다. 만일 이러한 복사와 흡수가 평형을 이룬다면 물체의 에네르기가 보존될것이다. 물체의 겉면의 성질이 복사와 흡수에 그 어떤 영향도 주지 않는 리상적인 경우에 이 물체를 절대흑체라고 부른다. 이러한 절대흑체는 겉면에 입사되는 전자기파를 100% 흡수한다. 절대흑체인 경우에는 그 물체의 단위겉면에서 단위시간동안에 복사되는 에네르기 P_0이 그 물체의 온도(절대온도) T의 4제곱에 비례한다. 즉

$$P_0 = \sigma T^4$$

여기서 $\sigma = 5.67\times10^{-8}$W/(m^2·K^4)이다. 다음의 물음들은 모두 절대흑체를 전제로 한것이다. 그리고 태양의 반경은 $R_{태} = 696\ 000$km, 태양겉면의 온도는 $T_{태} = 5\ 770$K, 화성의 반경은 $R_{화} = 3\ 395$km이다.

1) 태양복사에네르기의 거의 대부분은 2×10^{-9}m～2×10^{-8}m 파장구간에 집중되여있다. 대응하는 주파수구간을 밝혀라.
2) 태양겉면으로부터 1h동안에 복사되는 에네르기총량은 얼마인가?
3) 화성이 태양으로부터 받는 복사에네르기는 화성의 적도면 πr^2 (r는 화성의 반경)에 수직으로 입사되는 량으로 볼수 있다. 화성으로부터 태양까지의 거리는 태양반경의 400배이다. 다른 천체나 우주로부터의 복사를 무시한 상태에서 화성의 평균온도를 가늠하여보아라.

Ⅱ

8. 어떤 사람의 폐활량(한번 들이쉬는 공기의 체적)이 $V' = 400$mL이다. 이 사람이 숨을 한번 들이쉴 때 들어오는 공기분자들가운

데에는 그가 1년전에 숨을 한번 내쉴 때 내보낸 공기분자가 몇 개 들어있겠는가를 가늠해보아라.

9. 질량이 m_1 인 동(Cu)열량계안에 질량이 m_2 인 물을 넣었는데 평형온도는 t_{12} (셀씨우스온도)이다. 질량이 m_3, 온도가 t_3 인 얼음덩어리를 이 열량계안에 넣었다. 가능한 여러가지 경우들을 찾고 그때의 최종온도들을 구하여라. 동, 물, 얼음의 비열은 각각 c_1, c_2, c_3 이고 얼음의 비녹음열은 L 이다.

10. 반경이 R 인 수은방울이 높은 곳으로부터 떨어져 크기가 꼭같은 n 개의 작은 수은방울들로 갈라졌다. 수은의 밀도가 ρ, 겉면장력결수가 σ 라고 할 때 이 수은방울이 최소한 얼마의 높이에서 떨어졌겠는가?

11. 이전에 어떤 과학자는 그림 1-9-2에서 보여준 장치를 리용하여 액체의 체적팽창결수를 측정하였다. 여기서 A와 B는 굵기가 꼭같은 U자형유리관(U자관)이며 수직방향으로 설치되여있다. 이 관들은 각각 항온기 C(비교적 뜨거운)와 항온기 D(비교적 찬) 안에 꽂혀있다. U자관 안에 적당한 량의 측정하려는 액체를 담는다. C와 D에서의 온도들과 U자관안에서 액면의 높이들을 각각 재면 해당 액체의 체적팽창결수를 계산할수 있다. 그 계산공식을 구하여라.(유리관자체의 열팽창은 고려하지 않는다.)

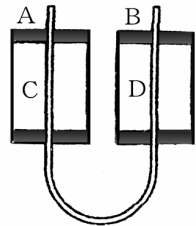



그림 1-9-2

12. 그림 1-9-3에서 보여준것은 파도발전식 등대의 기체흐름통로이다. 바다물면이 낮아질 때 S_1 은 닫기고 S_2 은 열리면서 매번 대기압이 1×10^5Pa, 온도가 7℃인 공기 0.233m^3를 받아들인다. 물면이 높아질 때는 S_2 이 닫기고 공기가 단열압축되며 압력이 $\sqrt{32}\times10^5$Pa로 될 때 S_1 가 열리게 되여있다. 피스톤이 공기를 전부 작업실로 밀어보내면서 타빈발전기가 동작한다. S_1 이 열린 다음 피스톤밑부분의 압력이 거의 변하지 않는다고 하자. 피스톤의 질량과

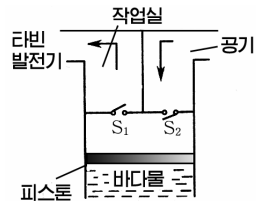



그림 1-9-3

마찰을 무시하는 경우 바다물이 한번 상승할 때 수행하는 일을 구하여라. 공기가 P_1V_1 상태로부터 P_2V_2 상태까지 단열변화될 때

$$\frac{P_1}{P_2}=\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{5/3}$$

관계가 성립되며 1mol의 리상기체에서 온도가 1℃ 높아질 때 내부에네르기는 $\frac{3}{2}R$ (R는 기체상수)만큼 커진다.

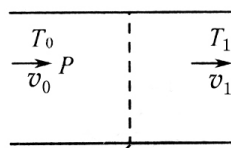
13. 압력이 P_0, 온도가 T_0인 공기 (매개 공기분자의 질량은 m_0, 매개 분자가 가지고있는 평균열운동에네르기는 $\frac{5}{2}kT_0$이다.)가 v_0의 속도로 자름면적이 S인 매끈한 관속으로 흐르고있다. 관속에는 공기에 대한 흐름저항을 무시할수 있는 금속그물망이 있는데 이 그물망을 전력 P로 가열한다.(그림 1-9-4) 때문에 공기는 가열된다. 이 과정이 평형상태에 이른 다음 관 끝부분으로 흘러나오는 공기의 속도가 v_1로 되였다. 흘러나오는 공기의 온도 T_1과 공기가 받게 되는 추진력을 구하여라.

T_0 P v_0 T_1 v_1
금속그물망

그림 1-9-4

제10장. 기체의 성질

I

1. 일정한 질량의 리상기체의 상태가 그림 1-10-1에서 보여준 *ab, bc, cd, da*과정을 거쳐 변화되고있다. 여기서 이 4개의 과정은 P-T선도에서 모두 직선이며 그중 *ab*선의 연장선은 자리표원점 O를 통과하며 *bc*는 *ab*에 수직, *cd*는 *ab*에 평행이다. 다

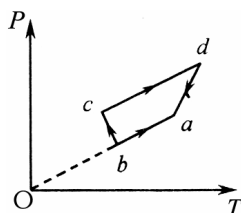



그림 1-10-1

음의 결론중에서 어느것이 정확한가?

1) ab과정에 기체의 체적이 계속 작아진다.

2) bc과정에 기체의 체적이 계속 작아진다.

3) cd과정에 기체의 체적이 계속 커진다.

4) da과정에 기체의 체적이 계속 커진다.

2. 어떤 리상기체에서 기체의 내부에내르기가 기체분자의 총 수 N에 그의 온도(절대온도)를 곱한 량에 비례한다는 사실이 알려져 있다고 하자. 즉

$$E = kNT \quad (k\text{는 비례결수})$$

이제 작은 구멍이 뚫려있는 금속용기에 기체를 넣고 가열한다. 가열전 기체의 질량은 m_1, 가열후 기체의 질량은 m_2이라면 가열전과 가열후 용기속에 있는 기체의 내부에네르기의 비가 다음 4개의 값들중에서 어느것과 일치하겠는가?

1) $\frac{m_2}{m_1}$ 2) $\frac{m_1}{m_2}$ 3) 1 4) 알수 없다.

3. 일반적으로 고압가마에서는 뚜껑자체를 잘 밀폐시키고 그 뚜껑우에 배기구멍을 뚫은 다음 그림 1-10-2와 같은 안전변을 설치한다. 가마안의 기체압력이 일정한 값에 이르면 기체가 안전변의 중력을 극복하고 고압기체를 밖으로 내보내면서 고압가마안의 기체압력이 필요한 값으로 일정하게 유지되게 된다. 안전변의 질량이 $m = 0.1$kg, 가로자름면의 직경이 $d = 0.3$cm, 배기구멍의 직경 $D = 2$cm, 대기압은 $P_0 = 10^5$Pa일 때 고압가마속에서 도달할수 있는 기체의 최대압력은 몇Pa인가? 만약 압력은 3.6kPa씩 증가시킬 때마다 물의 끓음점이 1℃씩 높아진다면 고압가마속에서 물의 온도가 얼마까지 높아지겠는가?

그림 1-10-2

4. 자름면적이 S인 기통을 수평으로 설치하고 고정시킨다. 기통벽은 열전달이 잘 되도록 만들었다. 두개의 피스톤 A와 B로 이 기통을 두개의 기체실 1, 2로 갈라놓았

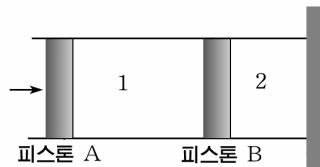



그림 1-10-3

는데 평형상태에서 1, 2기체실의 체적비는 3:2이다.(그림 1-10-3) 온도를 변화시키지 않는 조건에서 피스톤 A를 천천히 밀어주면서 오른쪽으로 d만큼 이동시켰을 때 피스톤 B는 오른쪽으로 얼마만큼 이동하겠는가?(피스톤과 기통벽사이의 마찰은 무시한다.)

5. 수직으로 놓은 기통속에 일정한 질량의 리상기체를 넣고 질량을 무시할수 있는 피스톤으로 막은 다음 그 우에 철가루를 무져놓는다.(그림 1-10-4) 처음에 피스톤은 기통속에 설치된 제한턱에 걸려있고 기체기둥의 높이는 H_0, 기체압력은 대기압 P_0이다. 이제 기체를 서서히 가열하여 온도를 $\Delta T = 60$K 높였을 때 피스톤(물론 철가루와 함께)이 제한턱에서 떨어지면서 올라가기 시작한다. 계속 가열하여 피스톤이 H_1=1.5H_0만큼 올라갔다. 그 다음 온도를 유지하면서 철가루를 점차 들어낸다. 철가루를 모두 없애버렸을 때 기체기둥의 높이가 H_2=1.8H_0이였다. 이때 기체의 온도는 몇K인가?(피스톤과 기통사이의 마찰은 무시한다.)

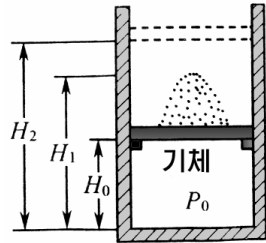



그림 1-10-4

6. 그림 1-10-5에서와 같이 수평으로 설치된 기통이 있는데 자름면적이 서로 다른 두개의 원형관이 련결된 모양으로 되여있다. 피스톤 A와 B는 길이가 $3l$인 가는 강철막대기로 련결되여있는데 마찰이 없이 기통좌우로 이동할수 있다. 피스톤 A와 B의 자름면적은 각각 S_A=30cm^2, S_B=15cm^{2}이며 두 피스톤사이에는 일정한 질량의 리상기체가 밀폐되여있다. 두 피스톤의 바깥쪽(A의 왼쪽과 B의 오른쪽)은 모두 대기이며 대기압은 P_0=1.0×10^{5}Pa로 일정하다. 피스톤 B의 중심에는 늘어나지 않는 가는 끈을 고정시키고 다른 끝은 벽에 고정시킨다. 기통안의 기체온도가 T_1=540K일 때 두 피스톤 A, B의 배치는 그림에서와 같다. 이때 가는 끈에 작용하는 장력은 F_1=30N이다.

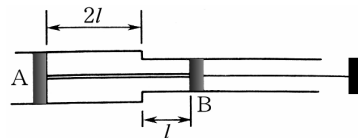



그림 1-10-5

1) 기통속의 기체온도를 540K로부터 천천히 낮출 때 몇K인 때

부터 피스톤이 오른쪽으로 이동하기 시작하겠는가?

2) 기체의 온도를 계속 낮추어나가면 피스톤 A가 오른쪽으로 이동하다가 온도가 몇K일 때 두 원통관의 련결부위에 닿게 되겠는가?

3) 피스톤 A가 이 련결부위에 닿은 후 기체의 온도를 유지하면서 피스톤 B에 왼쪽방향으로 힘을 주어 두개의 피스톤이 천천히 왼쪽으로 이동시켜 가는 끈을 당기는 힘이 다시 30N되게 하였다. 이때 준 힘 F_2의 크기는 얼마인가?

7. 그림 1-10-6에 보여준것처럼 땅면에 수직으로 설치한 기통속에 기체가 들어있고 그 우에는 피스톤이 놓여있다. 이 피스톤과 기통바닥은 튐성결수 k=600N/m인 용수철로 련결되여있고 전체계는 평형상태에 놓여있다. 외부대기압력은 P_0=1×10^5Pa이다. 피스톤과 기통바닥사이의 거리 l=0.5m, 기통의 자름면적은 $S=1\times10^{-2}\text{m}^2$이다. 등온상태에서 피스톤을 $2l$ 위치까지 서서히 끌어올렸는데 이때 힘은 F=500N이다. 용수철의 원래의 길이 l_0은 얼마이겠는가?(마찰, 피스톤과 용수철의 질량은 무시하여라. 그리고 전체 과정에서 기체는 루실되지 않으며 용수철은 후크의 법칙을 만족시킨다고 보아라.)

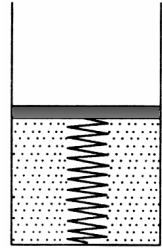



그림 1-10-6

II

8. 그림 1-10-7에서와 같이 두개의 단열동축관으로 막힌 고리형단열관 내부가 얇은 금속판으로 만든 세개의 피스톤에 의해 세 부분으로 갈라져있다. 피스톤은 열전도가 아주 잘되고 밀페성도 대단히 좋으며 고리형관안에서 마찰이 없이 운동할수 있다. 이 세 부분에 같은 종류의 리상기체를 채워넣고 용기를 수평면우에 설치한다. 처음에 Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ 세 부분의 기체압력은 모두 P_0, 온도는 각각 $t_1=-3$℃, $t_2=47$℃, $t_3=27$℃이며 세개의 피스톤과

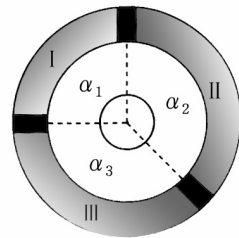



그림 1-10-7

고리중심을 련결한 선들사이의 각들은 $\alpha_1=90°$, $\alpha_2=120°$, $\alpha_3=150°$이다.

1) 평형상태에 이른 다음 α_1', α_2', α_3'는 각각 얼마인가?

2) 일정한 량의 리상기체에서 내부에내르기의 변화량이 온도변화량에 비례한다고 하자.(압력이나 체적에는 무관계하다.) 이런 조건에서 평형상태에 이른 다음 기체의 온도와 압력을 구하여라.

9. 원기둥모양의 용기속에 수은을 담고 역시 수은이 가득차있는 싸이폰(⋂형관)이 꽂혀있는 뚜껑을 덮었다.(그림 1-10-8) 싸이폰의 수직부분관들의 길이는 같으며 그중 한끝은 용기의 바닥에 닿아있고 다른끝은 막거나 열수 있게 그림처럼 설치되여있다. 필요한 수값들은 그림에 표시하여주었다.

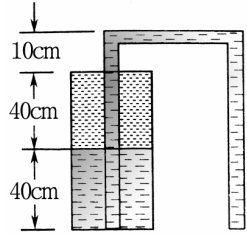



그림 1-10-8

처음에 싸이폰의 바깥쪽 끝부분을 열어놓으면 수은이 서서히 흘러나온다. 용기속의 기체압력이 얼마로 될 때 수은이 흘러나오지 않게 되겠는가? 이때 수은면은 처음 위치로부터 얼마나 더 내려오겠는가?

10. 달에서 피스톤으로 밀폐된 땅면에 수직으로 세운 기통속에 온도가 T인 아르곤기체를 담았다고 하자. 피스톤과 기통사이의 마찰은 무시할수 있다. 이 피스톤우에 꼭같은 피스톤을 가볍게 놓으면 새로운 평형상태에서 기체의 온도 T_2은 얼마이겠는가?(피스톤과 기통자체의 비열 및 열방출현상은 무시할수 있다. 기체는 리상기체로 보아라.)

11. 자름면적이 S인 밀페된 기통속에 질량이 m인 피스톤이 있고 피스톤의 오른쪽과 왼쪽에 각각 체적이 V_1, V_2인 리상기체가 들어있으며 압력 P로 평형상태에 있다.(피스톤과 기통사이의 마찰은 무시할수 있다.) 이제 어떤 방법으로 피스톤을 평형자리로부터 약간 이동시켰다가 가만히 놓으면 피스톤이 진동한다. 기체의 온도는 변하지 않으며 량쪽 기체의 온도는 같다고 볼 때

1) 피스톤의 진동이 조화진동임을 증명하여라.

2) 피스톤의 진동주기를 구하여라.

3) 기체의 온도가 0℃일 때 진동주기 τ_1 과 40℃일 때의 진동주기 τ_2의 비를 구하여라.

12. 그림 1-10-9에 보여준것과 같은 수직으로 설치된 기통이 있다. 기통의 바닥으로부터 기통입구까지 거리는 L_0이다. 질량과 두께를 무시할수 있는 강철판피스톤 A를 리용하여 일정한 질량의 공기를 기통속에 밀페시켰다. 기통과 피스톤사이의 마찰은 무시할수 있다. 평형상태에서 피스톤은 기통바닥으로부터 L_0위치에 있고 바깥대기압은 H_0이다. 수은이 담긴 병(병자체의 질량은 무시한다.)을 피스톤웃면에 놓으니 피스톤이 기통바닥으로부터 L위치에 이를 때 다시 평형을 이룬다. 만일 수은을 병속에 담지 않고 그대로 피스톤웃면에 천천히 쏟아부으면 역시 피스톤이 아래로 이동하면서 기체가 압축되다가 어떤 위치에서 정지된다. 이때 피스톤의 가능한 위치와 그에 대응하는 조건을 밝히여라.(주어진 조건들을 리용하여 수식으로 이끌어내여라.)

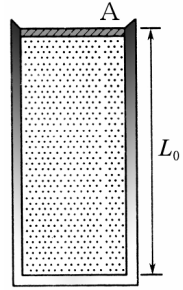



그림 1-10-9

III

13. 웃쪽은 막히고 아래쪽은 열린 가늘고 두께가 얇은 유리관을 물에 수직으로 꽂아놓고 물우에서 떠다니게 하였다. 이때 물면웃부분의 관의 높이는 b, 관의 질량은 m, 관의 자름면적은 S, 대기압은 P_0, 물의 밀도는 ρ이며 온도는 변하지 않는다.

1) 관을 물속으로 눌러줄 때 관이 받는 뜰힘 F와 관의 안팎에서 액면의 높이차 H사이의 관계 $F=f(H)$를 구하여라.

2) 이 관이 물우에서 떠다니는 경우와 물속에서 중력과 뜰힘이 같아지는 경우에 관의 안팎에서 액면의 높이차 H_1과 H_2을 구하여라.

3) 뜰힘이 최대로 될 때 관의 안팎에서 액면의 높이차 H_0와 뜰힘의 최대값 F_m를 구하여라.

4) $F=f(H)$함수를 그라프로 그리고 F_m, H_1, H_2, H_0를 표시하여라.

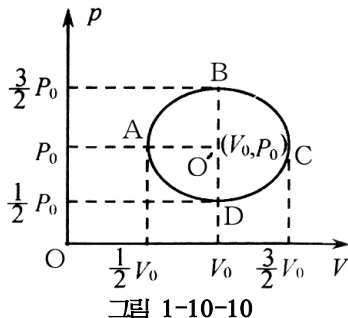
14. 늘어나지 않고 기체가 새지도 않는 천으로 만든 기구(천의 질량은 무시할수 있다.)의 직경이 d=2m이며 그 안에 P_0=1.005

$\times 10^5$Pa의 압력으로 기체를 채워넣었다. 이 천재질에서 찢어짐에 견디는 최대장력(1m 너비의 천을 량쪽으로 잡아당길 때 천이 찢어지는 순간에 당기는 힘)은 $f_{최} = 8.5\times 10^3$N/m이다. 처음 기구가 땅면우에 있을 때 대기압은 $P_0 = 1\times 10^5$Pa, 공기온도는 $T_0 = 293$K이다. 공기의 압력과 온도는 높이에 따라 선형적으로 감소하며 그 비례결수가 각각 $\alpha_p = -9.0$Pa/m, $\alpha_T = -3.0\times 10^{-3}$K/m라고 하면 이 기구가 얼마의 높이에 이르러 터지겠는가?(기구는 매우 서서히 떠오르므로 기구내부의 기체온도는 주위공기의 온도와 같다고보아라. 그리고 기구가 터질 때 기구주위에서 공기압력의 차이는 무시하여라.)

15. 1mol의 리상기체가 $P-V$ 선도에서 타원으로 표시되는 과정을 서서히 거치고있다.(그림 1-10-10) 타원의 중심 O′점에 해당한 상태에서는 기체의 온도가 $T_0 = 300$K이라고 하자. 한 순환과정에서 기체의 최대온도 T_1과 최저온도 T_2을 구하여라.

그림 1-10-10

제11장. 열학종합문제

I

1. 두 흑체의 평면들이 서로 평행으로 놓여있는데 그중 하나의 온도는 T_h, 다른 하나의 온도는 $T_L(T_h>T_L)$로 고정되여있다. 두 평면사이의 공간은 진공이다. 열복사때문에 생기는 열에네르기흐름을 감소시키기 위하여 이 두 평면사이에 서로 열적으로 차단된 얇은 흑체막들로 열장벽을 만든다. 이 흑체막들은 원래 흑

체평면들에 평행으로 설치한다.(그림 1-11-1) 열장벽을 설치한 후 열에네르기흐름과 설치하기 전 열에네르기흐름의 비 β 를 구하여라.(평면이 유한하기때문에 생기는 경계효과는 무시하여라.)

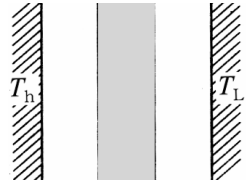



그림 1-11-1

2. 물속의 어느 한 위치에 정지상태에 있던 10^{-4}mol의 수소기체가 떠오르기 시작한다. 떠오르는 과정에 수소기체의 온도는 그 주위에 있는 물의 온도와 같은데 물속에서 온도의 분포는 $T=\frac{1}{8.31}(10^{-2}h^2+0.12h+0.2)$이다. 여기서 T는 절대온도, h는 물면으로부터의 깊이이다.(단위는 m) 수소는 리상기체로 볼수 있고 온도에 따르는 물의 밀도변화는 무시할수 있으며 그 값은 $\rho=10^3\text{kg/m}^3$이다. 여기서 물은 얼지 않으며 물면우에서 대기압은 $P_0=10^5\text{Pa}$, 중력가속도는 $g=10\text{m/s}^2$이다. 수소기체가 물면까지 떠오르는데 걸리는 시간을 구하여라.

3. 기체가 들어있는 통을 기체주입변을 통하여 체적이 V_0인 진공통과 련결하고 진공통에 기체를 넣으려고 한다. 기체통의 체적은 V, 기체통안에 들어있는 기체의 압력은 P이다. 처음에 주입변을 열어놓고 기체통과 진공통이 평형을 이룬 다음 변을 닫는다. 그 다음 그 기체통을 떼내고 다른 새 기체통을 련결하고 주입변을 열어 평형상태에 이르게 한다. 진공통에 들어있는 기체의 압력이 $P_0(P_0<P)$이 될 때까지 이런 과정을 반복하였다면 기체통을 몇개나 리용했겠는가? 이 과정에 기체의 온도는 변하지 않는다고 보아라.

4. 밀페된 용기안에서 물과 수증기가 평형상태에 있다. 14℃의 온도에서 물의 포화증기압은 1.6×10^3Pa이다. 물결면에 부딪치는 수증기분자들은 전부 물로 응축되며 기체분자들의 평균속도는 기체의 온도 T의 1/2제곱에 비례한다. 100℃와 14℃에서 단위시간당 물의 단위결면적에서 증발되여 수증기로 되는 분자수의 비 $n_{100}:n_{14}$를 근사적으로 유효수자 하나자리까지 구하여라.

5. 한끝이 막히고 다른끝은 열려있는 긴 U자형유리관속에서 수은에 의해 공기가 밀폐되여있다.(그림 1-11-2의 ㄱ) 여기서 l_0=15cm, h_1 = 22.5cm, h_2 = 27.5cm이고 관의 굽은 부분의 길이는 무시할수 있다. 대기압은 P_0 = 9 975Pa이다. 이 관을 서서히 거꾸로 뒤집어서 그림 1-11-2의 ㄴ처럼 세웠다. 이때

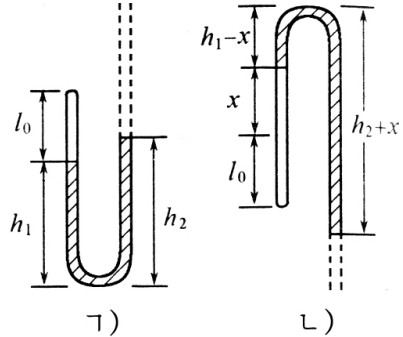



그림 1-11-2

1) 새로운 평형상태에서 공기기둥의 길이는 얼마인가?
2) 새 평형상태가 안정한 평형상태인가 불안정한 평형상태인가를 설명하여라.

6. 수은이 담긴 그릇에 웃쪽은 막히고 아래쪽은 열린 유리관을 수직으로 꽂았다. 이때 그릇에 담긴 수은면보다 우에 올라온 유리관의 길이는 $l=76$cm이고 유리관안에 밀폐되여있는 공기의 물질량은 $n=1\times10^{-3}$mol이다. 이 상태에서 유리관속에 있는 공기의 온도를 서서히 10℃ 낮추었다. 이 과정에 유리관속의 공기가 방출한 열량은 얼마인가? 유리관밖의 대기압은 10^5Pa이고 공기 1mol당 내부에네르기는 $U=C_V L$이다. 여기서 T는 절대온도이며 $C_V=20.5$J/(mol·K), 기체상수는 $R=8.31$J/(mol·K)이다.

7. 그림 1-11-3에 보여준것은 일정한 질량을 가진 리상기체의 상태변화과정을 $P-T$ 선도에 표시한것이다. 이 과정은 C점을 중심으로 하는 원으로 표시된다. 그림에서 P축은 P_C를 단위로, T축은 T_C를 단위로 표시하였다. 여기서 P_C와 T_C는 C상태에서의 압력과 온도이다. 이러한 순환과정에 제일 낮아지는 온도가 T_0이라고 하며 이 순환과정에 제일 커지는 밀도 ρ_1와 제일 작아지는 밀도 ρ_2의 비 ρ_1/ρ_2은 얼마인가?

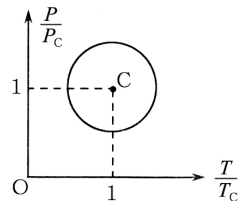



그림 1-11-3

8. nmol의 리상기체가 $P-V$ 선도에서 A-B과정을 따라 변화된다.(그림 1-11-4) 여기서 직선 AB의 연장선은 원점 O를 지난다. 이 기체 1mol의 질량은 μ, 정적비열은 상수로서 c_V이며 그림에 표시된 P_1, V_1, V_2은 이미 알고있다.

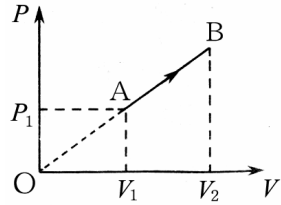



그림 1-11-4

1) AB과정에서 기체의 내부에네르기의 증가량 ΔU, 외부계에 수행하는 일 W, 외부계로부터 흡수한 열량 Q를 구하여라.

2) AB과정에서 비열이 상수임을 증명하여라.

9. 추운 겨울에 다음과 같은 실험이 진행되였다. 구형알루미니움덩어리를 어떤 온도 t까지 가열한 후 그것을 얼음이 언 호수의 결면에 가져다놓았다.(얼음은 충분히 두텁게 얼어있다.) 알루미니움덩어리는 점차 얼음속으로 들어가게 된다. 이 덩어리가 정지되였을 때 얼음의 결면으로부터 덩어리 맨 밑부분까지의 깊이 h를 측정한다. 알루미니움구를 각이한 온도로 가열하고 이런 실험을 8번 반복한 측정결과는 아래의 표와 같다.

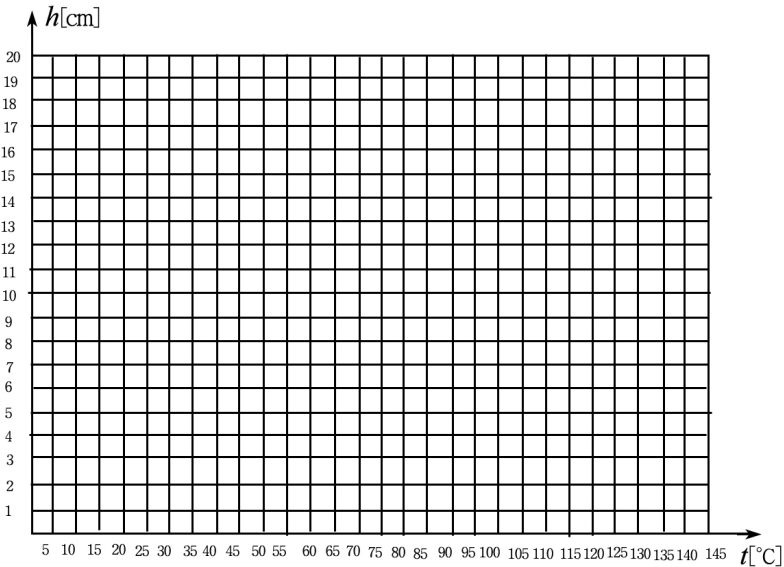



그림 1-11-5

알루미니움의 밀도는 물의 밀도의 약 3배이다. 실험환경과 호수

얼음의 온도는 0℃, 이때 얼음의 비녹음열은 $\lambda = 3.34 \times 10^5$J/kg이다.

1) 우의 측정결과들을 리용하여 알루미니움의 비열 c를 대략적으로 계산하여라.

2) 실험결과들중 일부자료는 리용하지 않게 되는데 그 원인에 대하여 설명하고 그라프를 리용하여 해석해보아라.

제12장. 전기마당

I

1. 파라데이는 전력선을 리용하여 전기마당을 표시할것을 제기하였다. 그림 1-12-1은 점전하 a, b가 만드는 전기마당의 전력선 분포이다. 아래 문장에서 정확한것을 말하여라.

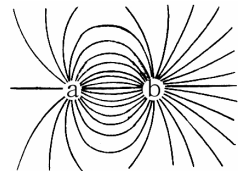



그림 1-12-1

1) a, b가 서로 다른 부호의 전하를 가지며 a의 전기량이 b의 전기량보다 크다.

2) a, b가 서로 다른 부호의 전하를 가지며 a의 전기량은 b의 전기량보다 작다.

3) a, b가 같은 부호의 전하를 가지며 a의 전기량은 b의 전기량보다 크다.

4) a, b가 같은 부호의 전하를 가지며 a의 전기량은 b의 전기량보다 작다.

2. 세기가 E이고 수직아래로 향한 고른전기마당에 질량이 각각 m이고 전기량이 각각 $+2g$와 $-g$인 대전된 두 구가 있다. 이 두 구는 길이가 ℓ인 절연선으로 련결되여있고 절연선으로 +전기를 띤 구를 묶어 O점에 매달았는데 평형상태로 되였다. 중력가속도가 g일 때 절연선의 O점에

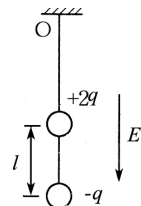



그림 1-12-2

대한 장력은 얼마인가?(그림 1-12-2)

3. 길이가 l 인 대전되지 않은 도체막대기의 왼쪽에 전기량이 $+q$ 인 점전하를 거리가 R 인 곳에 놓았다. 정전기적평형상태에 도달한 후 막대기의 유도전하가 막대기내부의 중심에 만드는 전기마당의 크기를 구하여라(그림 1-12-3)

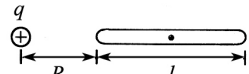



그림 1-12-3

4. 질량이 m 이고 전기량이 $-q$ 인 작은 물체가 수평자리길 Ox 우에서 운동한다. O점은 자리길과 수직인 고정벽에 있다. 자리길은 고른전기마당속에 있으며 마당의 세기는 E 이고 Ox 의 정의 방향을 향한다. 물체가 처음속도 v_0 으로서 x_0 점에서 Ox 자리길을 따라 움직일 때 크기가 변하지 않는 마찰력 f 를 받는데 $f=qE$ 이다.(그림 1-12-4) 물체가 벽과 충돌할 때 력학적에네르기의 손실은 없고 전기량도 보존된다고 하면 멎을 때까지의 총 운동거리 S 를 구하여라.

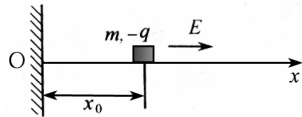



그림 1-12-4

5. 진공속에서 속도가 $v=6.4\times10^7$m/s인 전자묶음이 두 평행극판사이로 입사한다. 극판의 길이는 $l=8\times10^{-2}$m이고 두 극판사이 거리는 $d=5\times10^{-3}$m이다. 두 극판이 전기량을 띠지 않을 때 전자묶음이 두 극판사이의 가운데선을 따라 통과한다. 두 극판사이에 50Hz의 교류전압 $U=U_0\sin\omega t$ 를 걸어주어 전압의 최대값 U_0 이 어떤 값 Uc 보다 크면 전자묶음이 두 극판사이를 통과할 때도 있고 중단될 때도 있다.(그림 1-12-5)

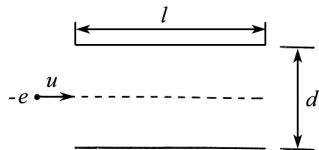



그림 1-12-5

1) Uc 의 크기를 구하여라.

2) U_0 이 어떤 값을 가질 때 통과시간 $(\Delta t)_{통}$ 과 중단시간 $(\Delta t)_{중단}$ 사이의 비가 2:1로 되겠는가?

6. 축전기평행극판사이의 거리가 d 이고 A판은 접지되여있으며 B판의 전위는 주기적으로 변한다. 전위의 절대값이 φ_0 이고 전자의 전기량은 e, 전기량과 질량의 비는 k 이다. $t=0$인 때 판에서 전자가 튀여나올 때 처음운동에네르기는 령이다.(그림 1-

12-6)

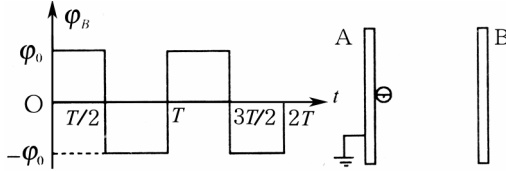



그림 1-12-6

1) 전자가 B판에 도달할 때 그의 운동에네르기가 최대로 되게 하기 위하여서는 주기 T가 어떤 조건을 만족해야 하는가?

2) 주기가 우의 물음의 최소값을 만족하고 전자를 $\frac{T}{4}$시각에 들여보낼 때 전자는 B판을 때리겠는가?

7. 평판축전기의 량극판사이에 공기가 있을 때 전기용량이 $C_0=40\text{PF}$이다. 이것을 전동력이 $\mathscr{E}=500\text{V}$인 전원에 련결하였다. 두께가 극판사이의 거리와 같은 운모를 두 극판사이에 끼우면 극판사이 공간의 절반을 채운다. 운모의 유전률이 2인 때 다음의것을 구하여라(그림 1-12-7)

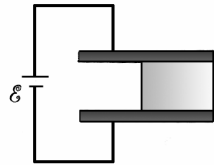



그림 1-12-7

1) 운모를 끼운 후 축전기용량 C를 구하여라.

2) 운모를 끼울 때 전원이 주는 에네르기를 구하여라.

8. 수평으로 놓인 평행축전기극판사이에 대전된 기름방울을 넣었다. 극판사이에 전기마당이 없을 때 기름방울은 중력, 뜰힘, 끈기저항의 작용을 받으면서 아래로 가속운동을 한다. 끈기저항의 방향과 운동방향은 서로 반대이며 크기는 $F_{끈}=6\pi\eta\gamma v$이고 η는 끈기결수, γ는 기름방울반경, v는 기름방울의 운동속도이다. $F_{끈}$은 속도가 커짐에 따라 커지므로 기름방울은 마지막에 등속으로 떨어진다. 전기마당 E속에서 기름방울이 우로 향한 전기마당의 영향을 받을 때 기름방울은 등속으로 우로 향한다. 이상의 실험에 따라 기름방울의 전기량을 측정하여

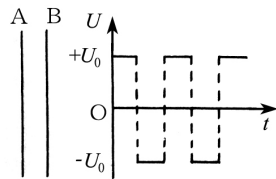



그림 1-12-8

라. 주어진것은 마당이 없을 때 떨어지는 속도 v_1, 마당이 있을 때 올라가는 속도 v_2, 고른전기마당의 세기 E, 끈기결수 η, 공기밀도 ρ_1, 기름방울밀도 ρ_2, 중력가속도 g이다.

9. 그림 1-12-8의 ㄱ에서 A와 B는 진공속에서 거리가 d인 평행 금속판이다. 전압이 걸린 후 그들사이의 전기마당은 고른전기마당이라고 볼수 있다. 그림 1-12-8의 ㄴ은 주기적인 교류전압파형인데 가로자리표는 시간 t이고 세로자리표는 전압 U를 표시한다. $t=0$인 때 전압은 U_0이고 반주기 지나서 $-U_0$으로 된다. 다시 반주기 지나 U_0으로 된다. $t=0$인 때 교류전압 U가 A, B사이에 걸리고 이때의 A판의 전위가 B판보다 높다. 이 순간 B판에 있는 처음속도가 0인 전자가 전기마당속에서 움직이기 시작한다. 전자가 A판에 도달할 때 최대운동에네르기는 얼마인가? 교류전압의 주파수는 최대로 얼마를 넘지 말아야 하는가?

10. 반경이 R인 반구로 되여있는 부도체의 걸면이 균일하게 대전되여 xOy면에 거꾸로 놓여있다. O는 구의 중심, ABCD는 반구에서 xOy면에 놓여있는 원으로 나타나는 부분이다. AOC는 직경이다. 전기량이 q인 점전하가 OC우의 E점에 놓여있고 OE=r이다. 이 점전하를 E점에서 천천히 이동하여 반구의 정점 T에 가져갈 때 외부힘이 수행한 일은 W이다.($W>0$, 중력의 영향은 무시한다.)

1) 이 점전하를 E점에서 천천히 A점으로 가져갈 때 외부힘이 수행한 일의 부호와 크기를 구하고 리유를 설명하여라.

2) P는 구중심에서 아래로 향한 점이고 OP=R이다. 이 점전하를 E점에서 천천히 P점으로 가져갈 때 외부힘이 수행한 일의 부호와 크기를 구하고 리유를 설명하여라.

11. 그림 1-12-9에서 보여준것은 물방울의 기전기원리도이고 M는 작은 구멍을 가진 물욕조이다. 물욕조에 소금물을 넣었고 소금물과 전극 P_1사이의 전압은 U_0, 1개 소금물방울의 질량은 m, 접시모양전극 P_2은

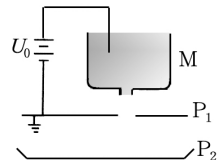



그림 1-12-9

P_1의 아래쪽에 놓여있고 그 거리는 h, P_1P_2사이의 축전기용량은 C 이다. 물방울이 P_1의 작은 틈을 거쳐 통과할 때 P_2도 한개의 축전기를 이루며 축전기용량은 C_2 이고 $C_2 < C_1$ 이며 C_2 은 U_0 으로 충전된다. 물방울이 +전하를 띠고 P_1의 작은 틈을 통과할 때 물방울이 떨어지는 회수는 작다. P_1P_2사이에는 동시에 두개의 물방울이 있을수 없다. 물방울이 떨어지기 시작할 때 P_2은 대전되여있지 않으며 P_2에서 물방울이 일으키는 위치이동에 대해서는 무시한다.

1) 전극 P_2이 도달할수 있는 최고전위를 구하여라.

2) 물방울이 P_2에 도달하기 전의 속도와 이 물방울 전에 떨어지는 물방울들의 개수사이의 관계를 구하여라.

Ⅲ

12. 평판축전기의 A판은 움직이지 않고 B판은 용수철로 벽에 련결되여 A판에 평행으로 움직일수 있다.(그림 1-12-10) 스위치 K가 닫긴 후 B판은 움직이기 시작하여 새로운 평형자리에 멎어선다. 이때 축전기량극판사이의 원래 평형거리 d 가 10% 감소된다. 만일 스위치 K를 떼면 두 극판사이의 평형자리가 어떻게 변화되는가.(이 시간내에 B판은 뚜렷한 운동을 하지 않는다고 볼수 있다.)

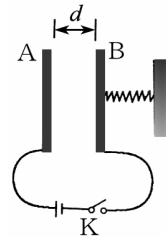



그림 1-12-10

13. 반경이 R 인 고리가 전기량 Q 로 대전되여있다. 고리의 어떤 직경 AOB우에(두 끝점은 제외한다.)서 전기마당의 세기가 령이라면 고리우에서의 전하분포를 구하여라.

14. 절연선으로 되여있는 원자리길이 있다. 그의 반경은 R 이고 자리길은 수평으로 놓여있으며 원중심은 O점이다. 금속구 P가 이 자리길에 들어와서 마찰없이 자리길을 따라 운동한다. 이 구 P는 전하 Q 로 대전되여있다. 자리길평면안의 A점 (OA=$r < R$)에 전하 q 가 놓여있다. 만약 OA련결선우의 어떤

점 A′에 전하 q'를 놓고 금속구 P에 처음속도를 주면 금속구는 자리길을 따라 등속으로 원운동을 한다. A′점의 위치와 q'의 값을 구하여라.

제13장. 전기회로

I

1. 고정저항 R_1, R_2이 전압 U가 12V인 직류전원에 직렬로 련결되여있다.(그림 1-13-1) 내부저항이 R_1, R_2보다 그리 크지 않은 전압계를 R_1의 량끝에 련결하였다. 전압계가 8V를 가리켰다면 이 전압계를 R_2의 량끝에 련결할 때 전압계는 ( )

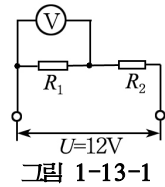



그림 1-13-1

1) 4V보다 작은 값을 표시한다.

2) 4V와 같은 값을 표시한다.

3) 4V보다 크고 8V보다 작은 값을 표시한다.

4) 8V와 같거나 큰 값을 표시한다.

2. 그림 1-13-2에 보여준 회로에서 R_1, R_2, R_3, R_4는 고정저항이고 R_5는 가변저항이다. 전원의 전동력이 $\mathscr{E}$이고 내부저항이 r이다. 전류계 A가 I를 가리키고 전압계 V는 U를 가리킨다. R_5의 미끄럼단자가 a로 향할 때 ( )

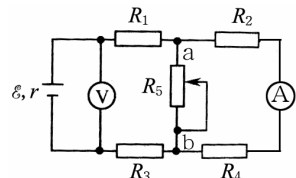



그림 1-13-2

1) I는 커지고 U는 작아진다.

2) I도 커지고 U도 커진다.

3) I는 작아지고 U는 커진다.

4) I도 작아지고 U도 작아진다.

3. 그림 1-13-3에서 $\mathscr{E}$=10V, R_1 = 4Ω, R_2 = 6Ω, $C = 30\mu$F, 전지의 내부저항은 무시한다.

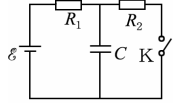



그림 1-13-3

1) 스위치 K를 닫을 때 안정된 후 R_1를 지나는 전류의 세기를 구하여라.

2) 스위치 K를 연 후 R_1을 지나가는 전기량을 구하여라.

4. 두개의 전압계 A와 B가 있다. 크기는 알고있고 내부저항은 모른다. 건전지의 내부저항은 무시할수 없으나 얼마인지 모른다. 두개의 전압계와 스위치 련결선을 리용하여 측정을 진행하고 전지의 전동력을 계산하여라.(전동력은 전압계의 최대한계를 넘어서지 않으며 건전지는 뜯지 못한다.)

1) 측정할 때의 회로를 그리여라.

2) 측정된 량을 알고있는 량으로 보고 전동력을 구하는 공식을 이끌어내여라.

5. 전기용품의 전압은 11V이고 작업전류는 4A이며 전지로 전기를 공급하고 전지의 전동력은 1.5V, 저항은 0.2Ω이다. 최대허용전류는 2A이다.

1) 몇개의 전지를 사용해야 하는가

2) 매 전지의 출력은 얼마인가?

3) 전지조의 효률은 얼마인가?

6. 그림 1-13-4는 전자의 전기량과 질량의 비 즉 e/m를 측정하기 위한 음극방사관이다. 관안에는 진공상태로 되여있고 L은 가열선조이다. 전원을 련결할 때 전자가 나온다. A는 가운데 조그마한 구멍이 있는 금속판이다. L과 A사이에 전압을 걸었을(이때의 전압은 가열선조전압보다 대단히 크다.)때 전자는 가속되여 그림의 점선으로 표시한 경로를 따라 형광판 S우의 O점에 도달한다. P_1, P_2은 점선에 평행인 금속판이고 두 극판사이의 거리는 d이다. 점선으로 표시된 원형구역내에 고른자기마당을 걸어주었다. 그 자기마당의 자기유도는 B이고 종이면에 수직으로 향하며 a, b_1, b_2, c_1, c_2은 모두 관껍데기의 금속인출선에 고정되여있고 $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$, $\mathscr{E}_3$은 3개의 조절 및 측정할수 있는 직류전원이다.

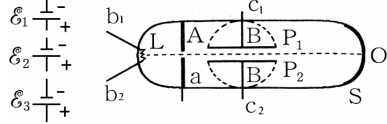



그림 1-13-4

1) 3개의 전원 및 음극판들을 련결하는 선들을 그리여라.

2) 문제에서 제시된 량들을 리용하여 e/m의 계산식을 유도하여라.

7. 그림 1-13-5와 같은 회로에서 전지조의 전동력은 $\mathscr{E}$ =30V, 전기저항 $R_2=10\Omega$, 두개의 수평으로 놓인 금속판사이의 거리는 $d=1.5$cm이다. 금속판사이의 고른전기마당속에 질량이 $m=7\times10^{-5}$g이고 전기량이 $q=-4.9\times10^{-10}$C인 기름방울이 있다. 가변저항 R_3의 값을 35Ω으로 했을 때 대전된 기름방울은 전기마당속에 정지되여있다. 이때 전류의 세기는 $I=1.5$A이다.

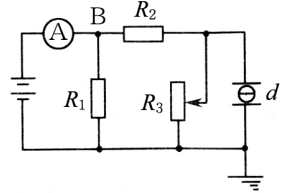



그림 1-13-5

1) 기름방울이 받는 힘을 분석하여라.

2) B점의 전위는 얼마인가?

3) 10s동안 저항 R_1에서 생겨난 열량은 얼마인가?

4) 전지조의 출력이 62.5W라면 R_3의 저항을 얼마로 해야 하는가?

II

8. 10V, 2W짜리 전기기구 A(순저항)를 전동력과 저항이 변하지 않는 어떤 전원에 련결하였다. 전기기구 A에서 실제로 소모되는 전력은 2W이다. 10V, 5W짜리 전기기구 B(순저항)를 이 전원에 련결하면 전기기구에서 실지 소비되는 전력이 2W보다 작아질수 있는가? 그렇게 될수 없다면 그 리유를 설명하여라. 가능하다면 전기기구 B의 실지 소모전력이 2W보다 작아지는 조건을 구하여라.(전기저항은 온도에 따라 변하지 않는다고 한다.)

9. 그림 1-13-6과 같은 회로에서 전원의 내부저항은 무시한다. 이때 전류계는 10mA(전류계와 전압계의 내부저항은 무시할수 없다.), 전압계는 2V를 가리킨다. 전류계와 전압계의 자리를 바꾸면 전류계는 2.5mA를 가리킨다. 우의 측정값에 따라 전압계내부저항 R_V와 저항 R_x값을 구할수 있는가?

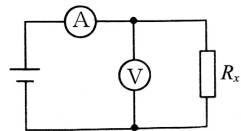



그림 1-13-6

10. 반경이 R인 얇은 구면도체가 있다. 구면우의 두 점 A, B에는 가는 도선이 련결되여있다. 도선에 흐르는 전류의 세기는 I_0이고 방향은 그림 1-13-7에서와 같다. OA⊥OB인 때 구면우의 C점(OC⊥OA, OC⊥OB)에서 전류의 방향은 어떻게 되는가? 구면우의 C점 량쪽의 두 점을 그

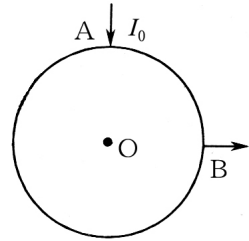



그림 1-13-7

들사이의 거리가 $\dfrac{R}{1000}$가 되도록 취한다. 그리고 두 점을 맺는 선분에 수직인 방향으로 전류가 흐른다면 이때 이 선분사이를 지나는 전류의 세기는 얼마인가?

11. 그림 1-13-8에서 $\mathscr{E}=6\text{V}$, $r=1\,\Omega$인 전지를 이었다. 저항이 $R=300\Omega$, 길이가 $l=20\text{cm}$, 축전기의 전기용량이 $C=\dfrac{1}{36}\times10^5\text{F}$ 이며 G는 예민한

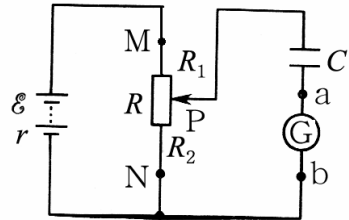



그림 1-13-8

검류계이다. 가변저항 R의 미끄럼단자를 저항의 제일 웃끝점 M으로부터 $v=36\text{m/s}$의 속도로 아래로 끌 때 전류계는 몇A를 가리키겠는가?

12. 그림 1-13-9에서와 같이 두개의 저항 $R_1=R_2=$ 1kΩ 전동력이 $\mathscr{E}=6\text{V}$인 전지렬, 2개의 2극소자 D를 회로에 련결하였다. 2극소자 D의 I_D-U_D의 특성곡선은 그림 13-9의 ㄴ에 주었다.

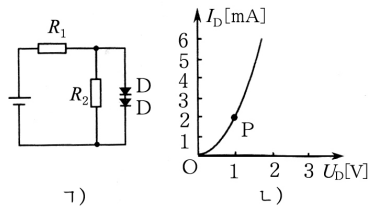



그림 1-13-9

1) 2극소자 D에 흐르는 전류의 세기를 구하여라.

2) R_1에서 소모되는 전력을 구하여라.

Ⅲ

13. 그림 1-13-10에서는 회로의 부분회로에 흐르는 전류의 세기와 방향 그리고 일부 저항들과 전원들의 저항값과 전압의 크기를 알려주었다. 주어진 값들을 리용하여 전기저항 R_x 의 부분회로에 흐르는 전류의 세기 I_x 와 그 방향을 계산하여라.

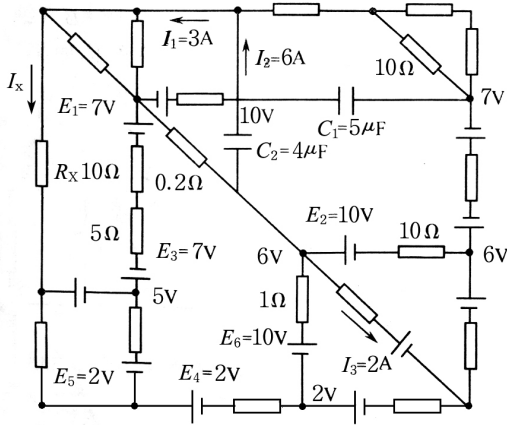



그림 1-13-10

14. 실험실에 마사진 전류계가 있다.(그림 1-13-11) 이 전류계에 1mA, 10mA, 100mA의 세 단자가 있는데 하나의 스위치로 이 세 단자를 절환할수 있다. 전류계의 눈금판은 이미 마사졌다. 그의 전기적특성은 알수 없다. 그러나 세개의 정밀분류저항은 정상이다. 여기서 $R_1 = 144\Omega$이다. 이미 마사진 눈금판과 외형이 같은 두개의 눈금판 A, B가 있는데 A에 흐르는 최대전류의 세기는 0.2mA이고 내부저항은 600Ω이다. 그리고 B의 최대전류의 세기는 0.5mA이며 내부저항은 120Ω이다. 분류저항을 원래의것으로 그대로 쓰는 상태에서 어느 눈금판을 바꾸어넣어야 하며 어떻게 련결해야 하는가?

그림 1-13-11

제14장. 자기마당

I

1. 질량이 m, 전기량이 q인 대전립자가 자기유도가 B인 강한 고른자기마당속에서 원운동을 하고있다. 립자의 이러한 원운동을 하나의 원전류로 볼수 있다. 이 원전류의 세기 I는 얼마인가?

2. 연구결과에 의하면 모든 종류의 소립자들에는 그에 대응하는 《반립자》들이 존재하고있다. 립자와 그에 대응하는 반립자들의 질량은 같고 전기량의 크기도 같지만 부호가 반대이다. 그림 1-14-1에 보여준것처럼 바른4각형 $abcd$의 면에 수직인 방향으로 뚫고나가는 강한 고른자기마당이 걸려있다. Ⅰ, Ⅱ 두개의 대전립자들이 같은 처음속도로 a점으로부터 ab방향으로 입사되여 각각 d, c점을 통과하였다.(립자들간의 호상작용은 없다고 보아라.) 이 립자들의 운동자리길을 그림에 보여주었다. 다음의 4가지 설명에서 정확한것을 찾아라.

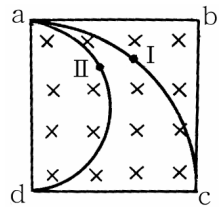



그림 1-14-1

   1) Ⅰ, Ⅱ립자들은 각각 양성자와 α립자일것이다.
   2) Ⅰ, Ⅱ립자들은 각각 반α립자와 반양성자일것이다.
   3) Ⅰ, Ⅱ립자들이 자기마당을 통과하는 시간은 같다.
   4) 자기마당속에서 운동하는 Ⅰ, Ⅱ립자들의 가속도크기의 비는 1:2이다.

3. 그림 1-14-2에 보여준것과 같이 질량이 m, 전기량이 $+q$인 립자가 두개의 평행전극판사이의 중심선으로 처음속도 v로 입사하였다. 전하의 입사방향은 전력선 및 자력선에 수직이다. 두 전극판사이의 거리는 d, 자기유도는 B이다. 이

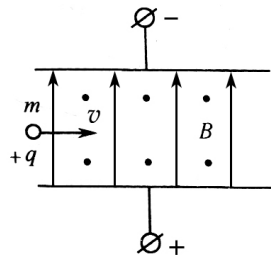



그림 1-14-2

때 립자는 전기마당 및 자기마당구역을 직선으로 뚫고 지난다.(중력은 고려하지 말라.) 자기유도값을 일정한 값까지 증가시켰더니 립자가 극판우에 떨어졌다. 립자가 극판에 떨어질 때 그의 운동에네르기는 얼마인가?

4. TV수상관에서는 자기편향기술을 써서 전자선을 편기시킨다. 전자선은 전압이 U 인 전기마당속에서 가속된 후 원형의 강한 고른 자기마당구역으로 들어온다.(그림 1-14-3) 자기마당의 방향은 원의 면에 수직이며 자기마당구역의 중심은 O, 반경은 r 이다. 자기마당이 없을 때 전자선은 O점을 통과하여 형광판의 중심 M에 떨어진다. 전자선이 형광판의 변두리 P점에 떨어지게 하려면 자기마당을 걸어주어 전자선이 일정한 각 θ (이미 알고있는 값이라고 한다.)만큼 편기되도록 하여야 한다. 이때 자기유도 B값의 크기는 얼마인가?

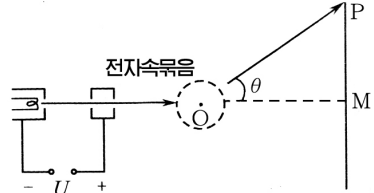



그림 1-14-3

5. 그림 1-14-4에서 보여준것처럼 각이한 속도를 가지면서 단위양전기량($+e$)으로 대전된 두가지 종류(질량수가 각각 63과 65)의 동이온속이 수평으로 놓인 작은 구멍 S를 통과한다. 이 구멍에는 강한 고른전기마당과 강한 고른자기마당이 걸려있다. 전기마당 E 는 우로부터 아래로 향하며 자기마당 B 는 그림면을 수직으로 뚫고들어가는 방향이다. 이 구멍속에서 편기되지 않는 이온들만이 구멍의 반대쪽 끝 S' 로 나오게 된다. S' 로 나오는 두가지 종류의 동이온들을 갈라내기 위하여 그림면에 수직인 방향으로 강한 고른자기마당 B' 를 걸어준다. 그러면 이 두가지 종류의 동이온들이 각각 반경이 서로다른 원자리길을 따라 운동한다. 이 이온들의 자리길반경을 각각 구하여라.(계산과정의 물리적근거를 명백히 설명하여라. 그림 14-

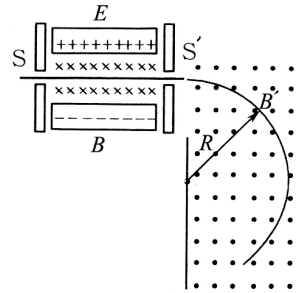



그림 1-14-4

4는 질량분석기의 동작원리이다.) 여기서 $E = 1 \times 10^5 \mathrm{V/m}$, $B = 0.4\mathrm{T}$, $B' = 0.5\mathrm{T}$이며 전기소량은 $e = 1.6 \times 10^{-19}\mathrm{C}$, 질량수가 63인 동원자 한개의 질량은 $m_1 = 63 \times 1.66 \times 10^{-27}\mathrm{kg}$, 질량수가 65인 동원자 한개의 질량은 $m_2 = 65 \times 1.66 \times 10^{-27}\mathrm{kg}$이다.

6. 그림 1-14-5에 보여준것처럼 두개의 원통형동축금속전극에서 바깥전극을 접지시켰다. 그리고 이 바깥전극에는 원통축에 평행인 방향으로 4개의 좁은 틈 a, b, c, d 가 있다. 바깥원통의 반경은 r_0 이다. 이 바깥원통밖에는 매우 넓은 구역에 축방향에 평행으로 고른 자기마당 B가 걸려있다. 그리고

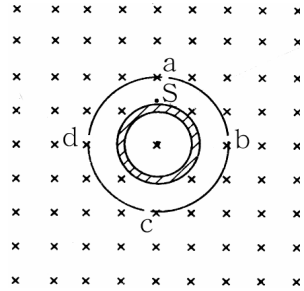



그림 1-14-5

두개의 동축원통사이의 구역에는 반경방향을 따라 바깥쪽으로 향하는 전기마당이 걸려있다. 질량이 m, 전기량이 $+q$인 립자를 안쪽 원통겉면근방의 S위치(틈 a에서 들여다보이는 위치)에서 출발시켰는데 처음속도는 령이다. 이 립자가 일정한 시간동안 운동한 후 정확히 S위치에 다시 돌아왔다면 이때 두 원통전극사이에 걸린 전압의 크기 U 는 얼마인가?(중력은 고려하지 말고 전체 장치는 진공속에 놓여있다고 보아라.)

7. 그림 1-14-6에서 점선 MN은 그림면과 그에 수직인 평면의 사귐선이다. 이 수직평면의 우측 반공간에는 강한 교류자기마당 B가 걸려있으며 그 방향은 그림면을 수직으로 뚫고나오는 방향이다. 점선 MN우의 한 점 O로부터 자기마당구역으로 전기량이 $+q$, 질량 m, 속도가 v인 두개의 립

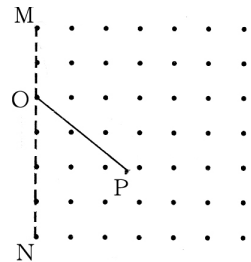



그림 1-14-6

자들을 서로 다른 시각에 서로 다른 두 방향으로 그림면에 평행으로 입사시켰는데 그림에서 표시한 P점에 동시에 도착하였다. O점과 P점사이의 거리는 L이다. 중력과 두 립자사이의 호상작용을 무시하고 다음과 같은 량을 구하여라.

1) 두 립자들의 자리길반경

2) O점에서 두 립자들을 출발시킨 시간간격

Ⅱ

8. 그림 1-14-7에서와 같이 질량분포가 균일한 가는 원형고리(반경 R, 질량 m)가 +전기로 균일하게 대전되여있다.(전기량 Q) 이제 절연체로 된 미끄러운 수평판우에 이 고리를 놓고 이것을 자기유도의 크기가 B인 고른자기마당속에 넣는다. 이때 자기마당의 방향은 수평판(즉 고리면)에 수직이면서 아래로 향한다. 그다음 이 고리를 고리의 중심축주위로 각속도 ω로 그림에 표시한 방향으로 회전시키면 고리에서의 장력이 얼마나 커지겠는가?

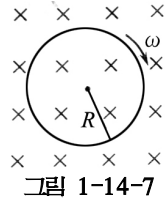



그림 1-14-7

9. 공간에 고른자기마당이 걸려있는데 자기유도의 크기는 B이고 자기마당의 방향은 그림면을 수직으로 뚫고 들어가는 방향이다.(그림 1-14-8) 이 공간속에 길이가 h이고 속이 빈 가는 절연관(관의 내면은 잘 연마되여있다.) MN이 놓여있다. 이 관속의 끝에 질량이 m, 전기량이 $q\,(q>0)$인 작은 구 P가 있다. 처음에는 작은 구 P가 관에 대하여 상대적으로 정지되여있다. 이제 관이 일정한 속도 v_0으로 축방향과 수직으로 오른쪽으로 운동한다. 중력과 기타 저항힘들을 무시할수 있는 경우에 작은 구 P는 관의 다른쪽 끝 N으로 나간 후에 원운동하게 되는데 이 원운동의 자리길반경 R를 구하여라.

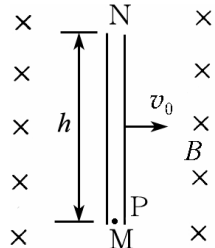



그림 1-14-8

10. 무한직선도선과 4각형도선틀 abcd가 같은 면우에 평행으로 배치되여있다.(그림 1-14-9) 여기서 ab의 길이는 l_1, bc의 길이

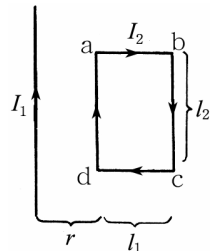
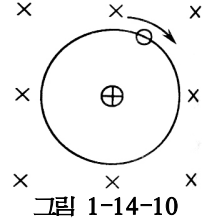



그림 1-14-9

는 l_2 ad변과 무한직선도선사이의 거리는 r, 무한직선도선에 흐르는 전류의 세기는 I_1, 4각형도선틀에 흐르는 전류의 세기는 I_2, 그 방향들은 그림에 화살부호로 표시하였다. 4각형도선틀이 무한직선도선에 주는 힘 F를 구하여라.

11. －전기로 대전된 립자가 고른자기마당속에서 고정된＋전하를 중심으로 하는 원운동을 하고있다.(시계바늘방향을 정방향으로 한다.) 이 원자리길의 반경은 r, 립자의 운동속도는 v이다.(그림 1-14-10) 이때 립자가 받는 전기마당의 힘이 로렌쯔힘의 3배이다.

그림 1-14-10

1) 만일 우에서 설명한 대전립자가 v의 속도를 가지고 우와 반대방향으로(시계바늘과 반대방향) 돌 때의 반경을 R라고 하면 R와 r의 비는 얼마인가?

2) 만일 자기마당을 순간적으로 없앤다고 해도 －전하가 ＋전하 주위로 돌아가겠는가? 립자의 운동자리길이 어떻겠는가? 구체적으로 설명하여라.(자기마당을 없앨 때 생기는 전기마당은 고려하지 말아라.)

12. 대전립자가 매질속으로 들어오면서 그의 속도에 비례하는 저항을 받는다. 이 립자가 정지할 때까지 이동한 거리가 10cm이다. 이 매질에 립자의 입사방향과 수직으로 고른자기마당을 걸어준 상태에서 우와 같이 입사시켰을 때 입사점으로부터 정지한 위치까지의 직선거리가 $l_1=16$cm이다. 만일 이 자기마당을 절반으로 약화시킨 상태에서 립자를 꼭같이 입사시켰다면 얼마만한 직선거리 l_2에서 정지하겠는가?

Ⅲ

13. 반경이 R, 전류의 세기가 I_1인 원형도선과 전류의 세기가 I_2인 무한직선도선 AB가 같은 평면우에 놓여있다.(그림 1-14-11) 무한직선도선

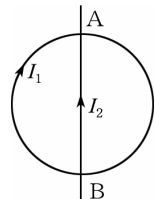



그림 1-14-11

AB는 원형도선의 중심을 지나는 수직직경방향으로 놓여있으며 원형도선과는 절연되여있다. 원형도선이 받는 힘을 구하여라.

14. 그림 1-14-12의 ㄱ에서 보여주는것처럼 반경이 R인 원통형진공관속에 두개의 격리판이 있어서 관의 내부가 세개의 구역으로 나뉘여있다. 두 격리판의 중심부에 작은 구멍 A와 A′가 뚫려있는데 이들사이의 거리는 L이다. 왼쪽 구역 I안에는 가속전기마당이 걸려있고 가운데구역 II에는 관의 축방향으로 향하는 강한 고른자기마당 B가 있으며 오른쪽 구역 III안에는 전기마당도 자기마당도 없다. 구역 I에 있는 음극 K로부터 련속적으로 방출되는 전자들이 이 구역안에서 가속된 후 구멍 A로 통과되는 전자선이 구역 II로 입사된다. 구멍 A를 통과한 전자들의 속도에서 축방향성분값이 v이고 전자들사이의 호상작용은 무시할수 있다고 하자. 이제 구역 II에서 축방향으로 걸어준 자기유도값을 변화시킬 때 구멍 A를 통과한 전자가 구멍 A′로 통과할수 있는 범위내에서의 자기유도의 최소값을 B_0이라고 하자. 구멍 A로부터 A′쪽으로 향하는 방향을 자기마당의 정방향으로 취할 때 구역 II에서 시간에 따르는 자기마당의 변화곡선은 그림 1-14-12의 ㄴ와 같다. 즉 $t=0$인 순간부터 B는 정방향으로 향하며 반주기$(T/2)$동안에 한번씩 이 방향이 반대로 된다.(T는 B의 변화주기) $t=0$인 순간부터 전자선이 련속적으로 구멍 A로 들어가 구역 II로 입사되며 관벽에 부딪치는 전자들은 벽에 흡수된다고 하자. 이런 조건에서

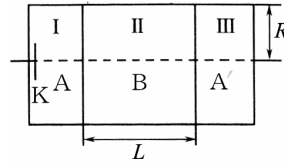
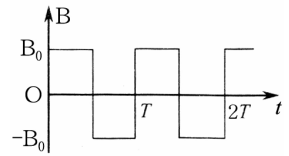



그림 1-14-12

1) 구멍 A를 통과한 전자들이 구멍 A′를 지나 구역 II으로 들어가려면 B의 변화주기의 최소값 T_0이 얼마여야 하는가?

2) 자기마당의 변화주기가 $T=2T_0$일 때 전자가 구멍 A′를 통과하며 구역 III에 들어서는 시간간격을 그림 1-14-12의 ㄴ의 시간축에 표시하여라.

3) 구역 Ⅱ에 들어온 전자들의 운동방향과 진공관의 축사이의 최대각은 얼마로 되겠는가?

15. $U = 1\ 000$V의 전압으로 가속된 전자(가속전 전자속도는 령)가 전자총 K에서 a방향으로 발사된다.(그림 1-14-13) 전자총출구로부터 $\varphi = 60°$ 방향으로 $d = 50$cm의 거리에 있는 표적에 이 전자가 부딪치게 하려고 한다. 다음과 같은 두가지 조건하에서 걸어주어야 할 강한 고른자기마당 B의 크기를 구하여라.

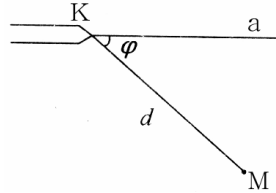



그림 1-14-13

1) 자기마당 B의 방향이 선 Ka와 KM이 놓이는 평면에 수직인 경우

2) 자기마당 B의 방향이 선 KM에 평행인 경우

제15장. 전자기유도

I

1. 그림 1-15-1에 지자기마당의 자력선의 배치를 보여주었다. 지구의 북반구에서 지자기마당의 수직성분은 아래쪽으로 향한다. 비행기가 하늘에서 등속으로 날고있는데 비행기의 날개는 수평상태이고 고도는 일정하다. 이때 지자기마당의 작용때문에 금속으로 된 비행기날개의 량끝에서 전위(포텐샬)차가 생기게 된다. 비행사의 왼쪽에 있는 날개끝에서의 전위를 φ_1, 오른쪽에 있는 날개끝에서의 전위를 φ_2이라고 할 때 다음 4개의 결론중에서 어느것이 맞는가?

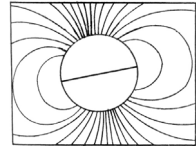



그림 1-15-1

1) 비행기가 동쪽으로 날고있다면 φ_1가 φ_2보다 높다.

2) 비행기가 서쪽으로 날고있다면 φ_2이 φ_1보다 높다.

3) 비행기가 북쪽으로 날고있다면 φ_1가 φ_2보다 높다.

4) 비행기가 남쪽으로 날고있다면 φ_2이 φ_1보다 높다.

2. 수평으로 놓여있는 매끈한 절연막대기 ab에 두개의 금속고리 M, N이 그림 1-15-2와 같이 걸려있다. 고리들은 전류가 흐르는 선륜막대기의 가운데부분에 놓여있다. 이 선륜의 가운데부분밖에서는 자기마당을 무시할수 있다. 가변저항기의 미끄럼단자를 오른쪽으로 이동시킬 때 이 두개의 고리가 어떻게 움직이겠는가? 다음 답에서 맞는것을 찾아라.

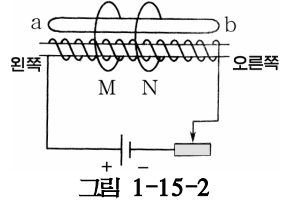



그림 1-15-2

1) 두 고리는 함께 왼쪽으로 움직인다.

2) 두 고리는 함께 오른쪽으로 움직인다.

3) 두 고리가 서로 접근한다.

4) 두 고리가 서로 멀어진다.

3. ab변과 cd변을 경계로 하는 내부공간에 고른자기마당 B가 그림면을 수직으로 뚫고나오는 방향으로 걸려있는데 이 구역의 너비는 l_1이다.(그림 1-15-3) 그리고 그림과 같이 직4각형도선틀의 짧은 변(길이는 l_2)이 ab와 겹쳐져있다.(긴 변의 길이는 $2l_1$) 어떤 시각부터 직4각형도선틀이 v의 속도로 ab변에 수직인 방향으로 자기마당구역으로 들어온다. 이와 동시에 외부힘이 이 도선틀에 가해지면서 도선틀의 속도와 방향이 변하지 않도록 한다고 하면 도선틀의 전기저항이 R라고 할 때 이 도선틀이 자기마당구역에 들어서는 때부터 완전히 통과할 때까지 외부힘이 수행하는 일은 얼마인가?

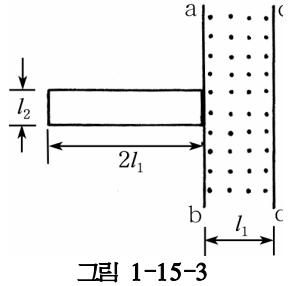



그림 1-15-3

4. 그림 1-15-4에서 AB, CD는 대단히 긴 평행금속도선인데 그들사이의 거리는 l이며 도선면은 수평면과 θ의 각을 이루고있다. 그리고 도선면에 대하여 수직이면서 웃방향으로 고른자기마당 B가 걸려있다. 이제 도선의 끌점 A와 C사이에 저항 R를 련결하고 두 도선에 수직으로 질량이 m인 금속막대기 ab를 설치한 다음 정지상태로부터 아래로 미끄러지게 한다. 막대기 ab가 가질수 있는 최대속도는 얼마인가?

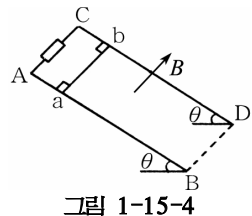



그림 1-15-4

5. 그림 1-15-5에서와 같이 고른자기마당 B 속에 θ 각을 이루고있는 두 도체 Oa와 Ob가 있다. 두 도체가 이루고있는 면과 자기마당은 수직이다. 충분히 긴 도체막대기 MN이 O점으로부터 출발하여 일정한 속도 v 로 두 도체우를 미끄러지는데 속도의 방향은 ab 도체와 평행이다. 그리고 도체막대기와 두 도체의 단위길이당 저항은 R 이다. 마찰력을 무시한 상태에서 다음과 같은 량을 구하여라.

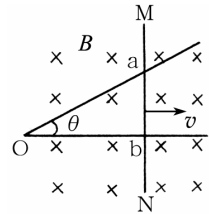



그림 1-15-5

1) 세 도체로 이루어진 회로내에서 유도전동력과 전류가 시간에 따라 어떻게 변하는가?

2) 도체막대기 MN에 작용하는 외부힘의 일능률은 얼마인가?

3) 전기저항때문에 소비되는 전력(전기적일능률)은 얼마인가?

6. 바른4각형도선틀 abcd에서 매 변의 길이는 8cm, 매 변의 저항은 0.01Ω이다. 도선틀을 자기유도 $B=0.05$T인 자기마당속에 놓고 OO′ 축주위로 $\omega=100$rad/s의 일정한 각속도로 회전시킨다.(그림 1-15-6) 회전방향은 그림에 표시되였다. OO′ 축은 도선틀의 면우에 놓여있고 이 면에서 $\overline{Od}=3\overline{Oa}$, $\overline{O'c}=3\overline{O'b}$ 이다. 도선틀이 회전하여 도선틀면이 B와 평행되는 순간에

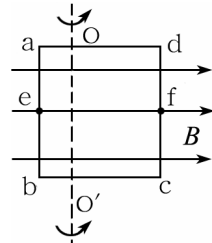



그림 1-15-6

1) 매개 변에 생기는 유도전동력의 크기는 얼마인가?

2) 도선틀에 흐르는 유도전류의 크기는 얼마인가? 도선틀의 매개 변에 화살부호를 주어 전류의 방향을 표시하여라.

3) e, f가 각각 ab와 cd의 가운데점일 때 e와 f 두 점사이의 전위차 U_{ef} (즉 $U_e - U_f$)는 얼마인가?

7. 길이와 저항이 각각 l, R 인 두개의 금속봉 ab와 cd의 질량은 각각 M, $m(M>m)$이다. 이 두개의 봉을 길이가 같은 두개의 연한 전기전도성끈(질량과 저항을 무시할수 있는)으로 련결하여 닫긴회로를 만들고 그것을 수평으로 설치된 매끈한 부도체막대기의

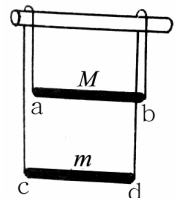



그림 1-15-7

량쪽에 걸쳐 드리워놓았다.(그림 1-15-7) 드리워진 상태에서 두 금속봉들은 수평상태에 있다. 닫긴회로평면에 수직방향으로 걸린 고른 자기마당 B 속에 이것을 설치하였다. 이때 금속봉 ab가 아래쪽으로 등속운동한다면 이 운동속도는 얼마인가?

Ⅱ

8. 반경이 $a=0.4$m인 원형구역안에 그림면을 수직으로 뚫고들어가는 방향으로 $B=0.2$T인 자기마당이 걸려있다. 반경이 $b=0.6$m인 금속고리가 자기마당과 동심으로 설치되여있다. 금속고리면은 자기마당과 수직이다. 이 금속고리에는 저항 $R_0=2\Omega$인 두개의 전등 L_1, L_2이 그림 1-15-8에 보여준것처럼 설치되여있으며 금속봉 MN이 이 고리와 전기적으로 접촉되여있다. 금속봉과 고리자체의 저항은 무시할수 있다.

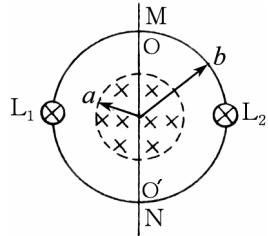



그림 1-15-8

1) 금속봉이 고리와 접촉한 상태에서 $v_0=5$m/s의 속도로 오른쪽 방향으로 등속으로 미끄러진다고 할 때 이 봉이 원형고리의 직경 OO′를 통과하는 순간에 MN에서의 유도전동력과 전등 L_1로 흐르는 전류의 세기를 구하여라.

2) 금속봉 MN을 없애치우고 오른쪽의 반원 OL_2O'를 OO′를 축으로 하여 90° 돌린다. 이때 $\dfrac{\Delta B}{\Delta t}=\dfrac{4}{\pi}$ T/s이다. L_1에서의 전력을 구하여라.

9. 그림 1-15-9에 자기류체식발전기의 원리도를 보여주었다. 자름면모양이 직4각형인 관에서 관의 길이 l, 너비 a, 높이 b, 관의 아래웃면들은 부도체판, 량측면들은 저항을 무시할수 있는 도체판들이며 이 도체판들에는 부하저항 R가 걸려있다. 그리고 이 직4각형관의 아래면으로부터 웃면쪽으로 수직방향으로 고른자기마당 B가 걸려있다. +전하와 −전하를 포함

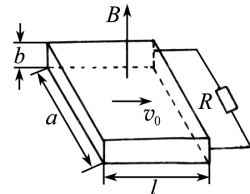



그림 1-15-9

하고있는 이온화된 기체가 이 관속으로 등속으로 흐른다. 이 기체가 받는 마찰력은 기체의 흐름속도에 비례한다. 그리고 자기마당과는 무관계하게 관의 량쪽 끝에서 이온화기체의 압력차는 P로 유지되고있다. 만일 자기마당이 없을 때 기체의 흐름속도가 v_0 이라면 자기마당이 걸렸을 때 자기류체식발전기의 전동력 $\mathscr{E}$ 은 얼마인가? 이온화기체의 비저항은 ρ 이다.

10. 그림 1-15-10에서와 같이 수평으로 놓인 부도체판우에 드림선으로 두개의 도선이 서있고 그들사이에 전기용량이 C 인 축전기가 련결되여있다. 이 두 도선에 질량 m, 길이 l 인 금속봉을 땅면과 평행으로 접촉시켜놓았다. 도선들과 금속봉사이의 전기적접촉은 아주 좋고 그들사이의 마찰은 없으며 부도체판으로부터 금속봉까지의 높이는 h 이다. 고른자기마당 B 가 도선들면에 수직인 방향으로 걸려있다. 처음에 축전기는 충전되지 않았고 매개 부분들의 저항은 무시할수 있다고 보아라. 이 금속봉을 가만히 놓을 때 부도체판까지 떨어지는데 걸리는 시간을 구하여라.

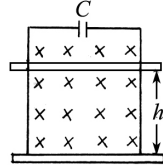



그림 1-15-10

11. 반경이 r 인 원형고리가 축대칭모양의 자기마당 B 속에서 자기마당에 수직인 방향으로 움직이고있다.(그림 1-15-11) 이 원형고리의 자름면적은 S, 밀도 d, 비저항은 ρ 이다. 어떤 순간에 원형고리의 이동속도가 v 라고 할 때

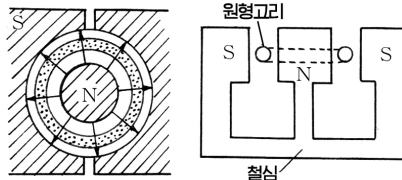



그림 1-15-11

1) 원형고리로 흐르는 유도전류는 얼마인가?

2) 원형고리의 가속도는 얼마인가?

12. 비자성체로 된 원기둥우에 두개의 도선을 겹쳐서 돌려감아 꼭같은 두개의 선륜을 만들었다. 그중의 한 선륜에는 스

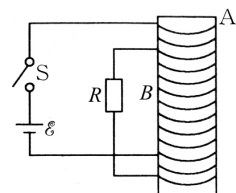



그림 1-15-12

위치 S를 거쳐 전동력이 $\mathscr{E}$인 전지를 련결하고 다른 선륜에는 저항 R를 련결하였다.(그림 1-15-12) 스위치 S를 닫을 때 다음의 량을 구하여라.

1) 저항 R에서 소비되는 전력 P는 얼마인가?
2) 전지를 통해 흐르는 전류 I의 시간에 따르는 변화곡선을 그리여라.
3) 일정한 시간 T가 흐른 다음 스위치 S를 열어놓았다. 이때로부터 시작하여 저항 R에서 방출되는 열량은 얼마인가?
(매개 선륜의 유도도는 L, 선륜의 저항은 무시하여라. 전지는 리상적인것이다. 원통형선륜내부에서의 자기마당의 에네르기는 $E = I^2L/2$이다. 여기서 L은 라선형선륜의 자체유도결수, I는 전류이다.)

Ⅲ

13. 그림 1-15-13에서와 같이 균일한 가는 도선으로 반경이 R인 원과 그에 내접하는 바른3각형으로 만든 회로가 있다. 회로에서 매 부분들의 저항값을 그림에 표시하여주었다. 그림면을 수직으로 뚫고들어가는 방향으로 고른자기마당 B가 걸려있는데 B값은 시간 t에 따라 일정한 속도 k로 감소하고있다. 그리고 $2r_1 = 3r_2$이다. 그림에서 A와 B사이의 전위차 $U_A - U_D$를 구하여라.

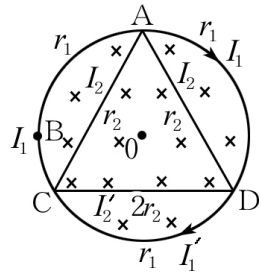



그림 1-15-13

14. 그림 1-15-14의 ㄱ에서 PQQ_nP_n은 여러개의 4각형 PQQ_1P_1, $P_1Q_1Q_2P_2$, $P_2Q_2Q_3P_3$, …, $P_{n-1}Q_{n-1}Q_nP_{n-1}$들로 이루어진 그물망회로이다. 여기서 4각형의 매 변들의 길이는 $l = 10$cm, 변 QQ_1, Q_1Q_2, Q_2Q_3, …과 PP_1, P_1P_2, P_2P_3, …들의 저항값은 모두 r이며 변 PQ, P_1Q_1, P_2Q_2, … 들의 저항값은 모두 $2r$이다. 그리고 두 점 PQ사이의 전체 저항은 cr(c는 주어진 량)이다. $x > 0$인 빈공간에 시간에 따라 일정하게 증가하는 자기마당이 걸려있으며 그 방향은 Oxy평면에 수직이면서 종이

면을 뚫고들어가는 방향이다. 이제 이 도선회로 PQQ_nP_n을 일정한 속도 $v=5\text{cm/s}$의 속도로 x축을 따라 자기마당구역으로 운동시킨다. 이 운동과정에 PQ변은 y축에 언제나 평행이다.(그림 1-15-14의 ㄴ) PQ와 y축이 겹치는 순간을 $t=0$으로 놓을 때 그 이후 임의의 순간 t에서 자기마당은 $B=B_0+bt$이다. 여기서 t의 단위는 s, B_0은 주어진 량, $b=0.1B_0/S$이다. $t=25\text{s}$ 순간에 도선 PQ로 흐르는 전류의 세기를 구하여라.(회로의 자체유도는 무시하여라.)

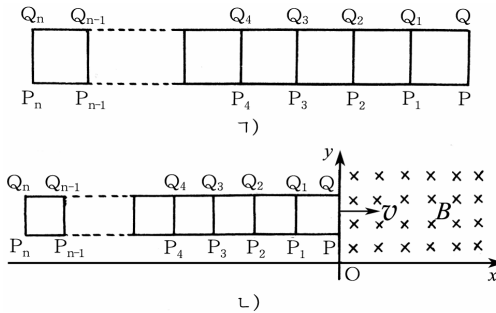



그림 1-15-14

15. 그림 1-15-15에서와 같이 반경이 R인 무한원기둥구역안에 고른 자기마당 B가 걸려있는데 그 방향은 원기둥축에 평행이면서 그림면을 뚫고나오는 방향이다. 반경이 역시 R인 절연체고리를 종이면우에 고정시키되 자기마당구역과 동심이 되게 배치하였다. 이 절연체고리에 질량 m, 전기량 q ($q>0$)인 대전된 작은 구 (고리와의 마찰은 없다.)를 꿰여놓았다. $t=0$인 순간에 $B=0$이다. 이때 작은 대전체구는 정지되여있다. $0<t\le T$ 구간에서 B가 시간 t에 따라 일정한 속도로 커져서 $t=T$일 때 $B=B_0$으로 되며 $t>T$일 때에는 $B=B_0$으로서 변하지 않는다. $t>0$일 때 이 구의 운동상태와 이 구가 절연체고리에 주는 힘 (그림에서 반경방향으로 주는 힘)의 시간에 따르는 변화를 고찰하여라. 그림면을 수평면으로 보고 이 구가 받는 중력과 고리의 맞선힘은 서로 상쇄된다고 생각하여라.

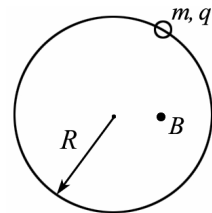



그림 1-15-15

제16장. 교류전류

I

1. 교류발전기가 동작할 때 전동력은 $\mathscr{E}=\mathscr{E}_0 \sin\omega t$ 이다. 만약 회전자의 회전속도가 2배로 빨라지고 기타 조건이 변하지 않는다면 그 전동력은 ( )이다.

1) $\mathscr{E}_0 \sin(2\omega t)$　　3) $\mathscr{E}_0 \sin(\omega t/2)$

2) $2\mathscr{E}_0 \sin(2\omega t)$　　4) $2\mathscr{E}_0 \sin(\omega t/2)$

2. 그림 1-16-1과 같이 변압기의 1차권선과 2차권선의 권회수의 비는 N_1:N_2=1:2이고 전원전압은 U = 220V이다. A는 허용전류가 I_0 = 1A인 휴즈선이고 R 는 가변저항기이다. 1차권선의 전류가 I_0 을 초과하지 않게 하기 위하여 저항 R 를 조절할 때 그 저항의 최소값이 얼마여야 하는가?

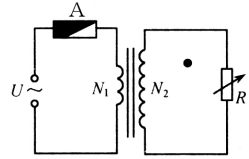



그림 1-16-1

3. 자체유도결수가 L 인 권선과 가변축전기 C 로 구성된 라지오의 공진회로가 있다. 라지오가 $f_1 = 550$kHz로부터 $f_2 = 1\ 650$kHz까지의 모든 통로를 받을 때 f_1 에 대응하는 가변축전기 C_1 의 용량과 f_2 에 대응하는 축전기 C_2 의 용량사이의 비는 ( )이다.

1) 1:$\sqrt{3}$　2) $\sqrt{3}$:1

3) 1:9　4) 9:1

4. 그림 1-16-2는 방송탑에서 내보내는 무선신호의 수신회로이다.(P는 레시바이다.)그림에서 한개의 소자가 빠졌다. 일반적인 부호를 리용하여 이 소자를 그림에 그려넣어라. 그림에서 C_1 는 어떤 작용을 하며 축전기 C_2 은 어떤 작용을 하는가?

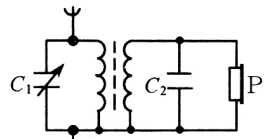



그림 1-16-2

5. 소형발전기의 회전자는 고른자기마당속에서 일정한 각속도 ω 로 자기마당방향에 수직인 축주위로 돌아간다. 권회수는 $n = 100$이다. 매 권선을 지나는 자력선묶음 Φ 는 그림과 같이 시간에 따라 시누스적으로 변한다.(그림 1-16-3) 발전기내부저항은 $r = 5$

Ω이고 외부회로의 전기저항은 $R=95\Omega$이다. 유도전동력의 최대값은 $\mathscr{E}_{최대}=n\omega\Phi$이고 $\Phi_{최대}$은 매 권선을 지나는 자력선묶음의 최대값이다. 외부회로와 직렬로 련결한 교류전류계(내부저항은 계산하지 않는다.)의 전류값을 구하여라.

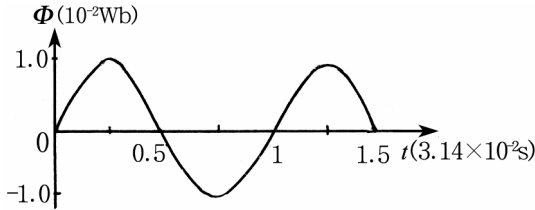



그림 1-16-3

6. 그림 1-16-4는 직선가속기의 원리도이다. 고진공의 긴 통로에는 길이가 점차적으로 커지는 같은 축을 가진 금속관들이 있는데 매 관은 제각기 주파수가 f이고 전압이 U인 교류전원에 련결되여있다. 관들사이의 틈은 매우 작다. 립자가 발생기로부터 처음속도없이 나온 후 1차로 가속되여 v_1의 속도로 첫 관에 입사한다. 립자가 첫번째 관의 중가운데 왔을 때 매 관사이에 가해지는 교류전압이 변화되는데 첫번째 관보다 두번째 관에 더 높은 전압이 걸리게 된다. 만일 립자의 질량이 m이고 전기량이 $-q$라면 립자가 끊임없이 가속운동하기 위해서는 매 관의 길이가 어떤 조건을 만족해야 되는가?(매 관에 가한 교류전압은 직각파형이다.)

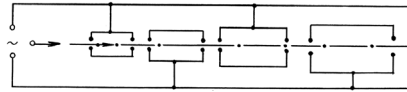



그림 1-16-4

7. 그림 1-16-5는 3상변압기의 그림이다. 1차권선과 2차권선의 비는 $n_1/n_2=30$이고 측정된 2차권선의 a, b, c 세 단자의 임의의 두 단자사이의 전압은 380V이다. 1차권선의 세 단자의 임의의 두 단자사이의 전압은 얼마인가?

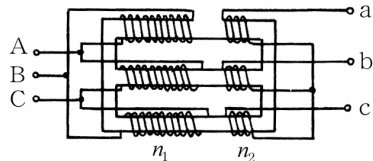



그림 1-16-5

8. 그림 1-16-6의 ㄱ에 보여준 회로에서 두개의 2극소자는 리상적

인 2극소자라고 볼수 있고 $R_1=R_2$ 이다. a단자와 b단자사이의 전압과 시간사이의 관계를 그림 ㄴ의 우에 보여주었다. 그림 ㄴ의 아래에 a단자와 c단자사이의 전압과 시간사이의 관계곡선을 그려라.(한 주기를 그려라.)

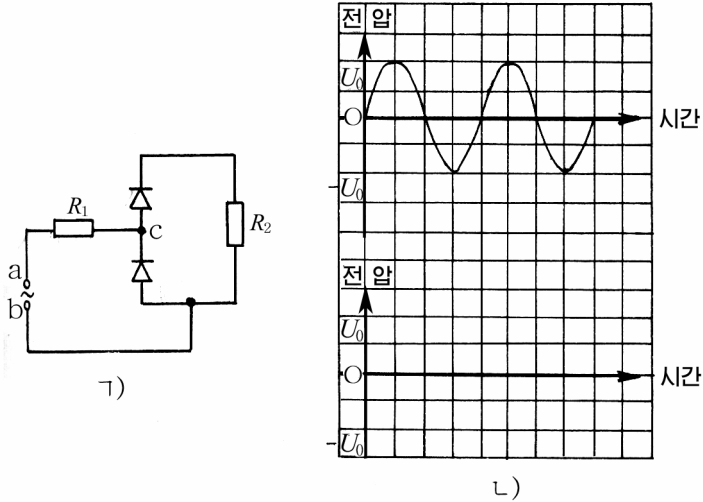



그림 1-16-6

9. 그림 1-16-7에서 보여준 철심에 두개의 권선이 감겨져있다. 매개 권선이 만드는 자기마당은 철심을 뚫고나올수 없고 같은 두개의 부분으로 나눌수 있다. 권선 1에 전압이 $U_1=40\text{V}$인 교류를 련결하였을 때 권선 2의 전압은 U 이다. 만일 권선 2에 전압이 U 인 교류회로를 련결하였을 때 권선 1에는 얼마만한 전압이 걸리는가?

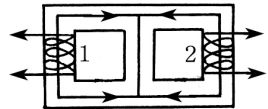



그림 1-16-7

10. 그림 1-16-8에서 보여준 교류회로에서 1과 2사이에 127V의 전압을 걸어주면 저항 R_1 에서 얼마만한 에네르기를 소비하겠는가? 여기서 $R_1=10\text{k}\Omega$, $R_2=R_3=6\text{k}\Omega$ 2극소자 D는 리상적이다.

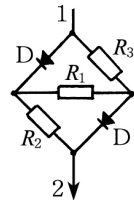



그림 1-16-8

11. 자체유도곁수가 L_1 와 L_2 인 두개의 선륜이 있다. 스위치 K_1와

K_2을 전동력이 $\mathscr{E}$ 이고 내부저항이 r 인 전원에 련결하였다. (그림 1-16-9) 처음에 두개의 스위치를 모두 열어놓았다. 스위치 K_1가 닫겨져 선륜 L_1 에 흐르는 전류가 I_0 에 도달한 후 K_2을 닫는다. K_2을 닫은 후 권선 L_1 와 L_2 에 흐르는 안정전류를 구하여라. 권선의 저항은 무시한다.

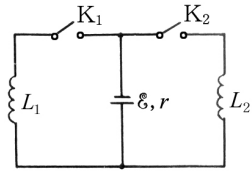



그림 1-16-9

III

12. 한대의 소형발전기의 정격출구전압이 220V이고 출구전류는 40A이며 11W짜리 전등에 전기를 공급한다. 전등의 력률이 $\cos\varphi_1 = 0.4$이라면 몇개의 전등에 전기를 공급할수 있는가? 전등의 력률이 $\cos\varphi_2 = 0.8$에 도달했을 때 몇개의 전등에 전기를 공급할수 있는가?

13. 전기용량이 $C = 40\mu F$인 축전기가 전압이 $U = 220V$, 주파수가 f=50Hz인 교류회로에 련결되였는데 측정된 전류의 세기는 $I = 2.75A$이다. 전압의 순간값이 $u = 0$일 때를 $t = 0$인 순간으로 잡고 그의 순간값이 2.75A인 때의 t_1 를 구하고 이때 전압의 순간값 u_1 를 구하여라.

14. 축전기 C와 저항을 무시한 교류전류계 및 표준유도선륜이 직렬회로를 이루고있고 유도선륜안의 철심을 축을 따라 이동시킬 때 선륜의 유도도 L 이 변한다.(그림 1-16-10) 전원은 회로에 시누스전압을 공급하는데 그 전압의 실효값은 2V이며 주파수는 $500/2\pi$ Hz이다. 유도선륜의 유도도를 변화시킬 때 어떤 위치에서 전류계를 지나는 전류값이 최대값에 이르는것을 관측할수 있다. 그후 철심을 이동할 때 전류계는 철심의 두곳에서 전류의 세기가 최대값의 $1/\sqrt{2}$ 이라는것을 가리킨다. 이 두곳에 대응한 유도선륜의 유도도는 각각 $L_1 =$ 0.9H,

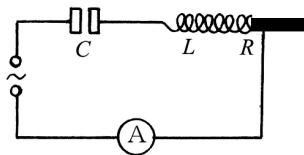



그림 1-16-10

$L_2 = 1.1$H이다.

1) 관측한 상태를 해석하고 축전기의 용량 C 와 선륜의 저항 R 를 구하여라.

2) 두개의 유도도 L_1 와 L_2 의 매개 값에 대해 다음의것들을 구하여라.

① 회로의 저항

② 회로에 흐르는 전류의 세기

③ 전류와 전압사이의 자리각차

벡토르선도로 회로에서 매 요소의 전압의 크기와 자리각을 밝혀라. 그리고 매 경우에 전류 또는 전압의 자리각들중에서 어느것이 앞서는가를 설명하여라.

제17장. 전기학종합문제

1. 전력선이 정의 점전하 q_1 에서 나와 부의 점전하 $-q_2$ 로 들어간다.(그림 1-17-1) q_1 에서 나올 때 두 점전하를 잇는 직선과 각 α 를 이룬다. 전력선이 얼마만한 각도 β 로 부의 점전하로 들어가겠는가?

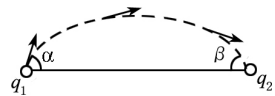



그림 1-17-1

2. 그림 1-17-2와 같이 반경이 r 인 금속구가 다른 물체들로부터 멀리 떨어져있고 저항 R 를 통해 땅과 접지되여있다. 전자선이 먼곳으로부터 속도 v 로 구에 떨어진다. 매 1s마다 n 개의 전자가 구에 떨어진다. 매 1s마다 나오는 열량과 구의 전기량을 구하여라.

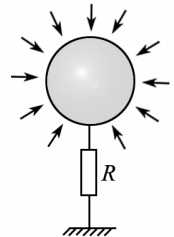



그림 1-17-2

3. 그림 1-17-3과 같이 마찰이 없는 수평인 나무(절연물)책상우에 3개의 대전된 질점 1, 2, 3이 있는데 이것들은 변의 길이가 l 인 바른3각형의 정점들에 놓여있다. 점 C는 바른3각형의 중심(세 가운데선의 사귐점)이다. 3개의 질점

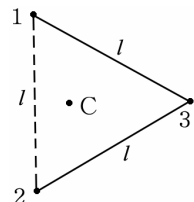



그림 1-17-3

의 질량은 각각 m 이고 대전된 전기량도 각각 q 이다. 질점 1과 3, 2와 3사이는 가는 절연막대기로 서로 련결하였다. 이음점 3은 매우 유연하다. 처음에 세 질점의 속도가 령이라면 운동과정에 질점 3이 점 C에 이르렀을 때 그의 속도는 얼마인가?

4. 구조물의 두 점 A와 B사이의 저항 R_{AB} 를 구하여라. 이 구조물은 같은 종류의 가는 금속으로 만들었는데 단위길이당 저항이 ρ 이다. 이 구조물에 내접하는 바른3각형의 수는 무한대이다.(그림 1-17-4) A와 B사이 거리는 a 이고 내접하는 바른3각형의 변의 길이는 차례로 절반씩 작아진다.

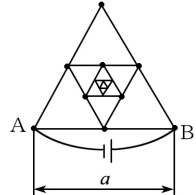
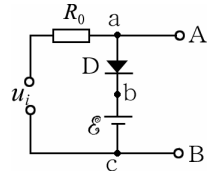



그림 1-17-4

5. 그림 1-17-5에서와 같이 입구전압 $u_i = 5\sin\omega t[\mathrm{V}]$, 직류전원의 전동력 $\mathscr{E}$ =3V이다.

1) u_{AB} 의 파형을 그려라.

2) D를 반대로 련결하면 두 u_{AB} 는 어떻게 되는가?

그림 1-17-5

6. 똑같은 두개의 금속고리의 반경은 R 이고 질량은 m 이다. 고른 자기마당속에서 자기유도는 B_0 이고 그 방향은 고리면에 수직이다.(그림 1-17-6) 두 고리는 a와 c점에서 접촉되여있고 각 $\alpha = \pi/3$ 이다. 자기마당을 없앨 때 고리가 가지게 되는 속도를 구하여라. 고리를 구성한 매 도선의 저항은 r 이다. 고리의 자기유도를 고려하지 않으며 자기마당을 없앨 때 고리의 이동을 무시하며 마찰도 없다.

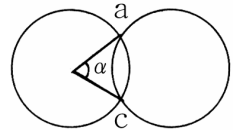



그림 1-17-6

7. 그림 1-17-7과 같이 반경이 R 인 원기둥구역안에 고른자기마당이 있는데 그 방향은 그림면에 수직이면서 나오는 방향으로 향한다. 자기유도 B 의 시간에 따르는 변화률은 $\Delta B/\Delta t = k$ 이다.(k 는 정의 값을 가지는 상수) 원기둥구역의 바깥에는 자기마당이 없다. 그림에 활줄

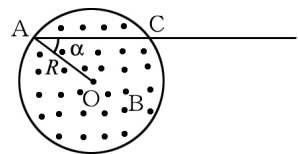



그림 1-17-7

AC와 그 연장선을 주었다. 활줄 AC와 반경 OA사이의 각 $\alpha=\pi/4$ 이다. 직선우의 임의의 점과 A점사이의 거리를 x 라고 하면 A에서 직선을 따라 이 점까지 갈 때 전동력의 크기를 구하여라.

8. 어떤 사람이 그림 1-17-8과 같은 장치를 만들고 권선의 자체유도결수를 측정하였다.

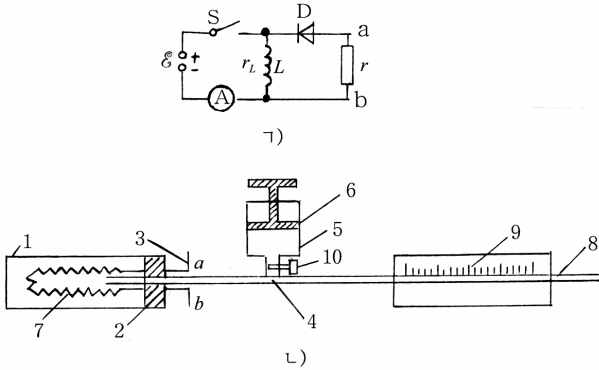



그림 1-17-8

그림에서 $\mathscr{E}$ 는 전압을 조절할수 있는 직류전원이고 S는 스위치, L은 측정하려는 권선의 자체유도결수, r_L 은 권선의 직류저항, D는 리상적인 2극소자, A는 전류계이다. a, b사이의 저항선이 그림의 ㄴ에 보여준 시험관 1안에 들어있다. 기통 5와 시험관 1의 밀페된 통에는 어떤 기체(리상기체라고 볼수 있다.)가 있는데 피스톤 6을 아래우로 이동시켜 실관 8의 색있는 액체방울의 처음위치를 조절할수 있다. 이것을 조절한 후 발브 10을 꽉 막아 량쪽의 기체를 서로 분리시킨다. 실관 8의 내경은 d 이다. 압력이 변하지 않는 조건에서 시험관의 온도가 올라갈 때 흡수되는 열량은 C_P 이고 대기압력은 P 이다. 시험관 기통, 실관은 모두 열교환이 없다. 저항선의 비열은 계산에 넣지 않는다. 스위치 S가 닫긴 후 권선 L에서 자기마당을 발생하는데 권선의 자기마당에네르기는 $W=\frac{1}{2}LI^2$ 이다. I 는 권선을 통해 흐르는 전류이다. 그 값은 전류계 A로 측정한다.

1) 이 실험의 순서를 써보아라.

2) 문제에서 이미 알려진 량(r, r_L, C_P, P, d 등) 및 직접 관측할수 있는 량을 리용하여 자체유도결수 L을 표시해보아라.

그림 1-17-9

9. 그림 1-17-9와 같이 수평방향의 고른자기마당이 있고 자기유도 B는 매우 크다. 반경이 R이고 두께가 $D\,(D \ll R)$인 금속원판이 이 마당에 수직으로 아래로 떨어진다. 판면은 수평면에 수직이고 자기마당 B의 방향과 평행이다. 금속원판의 저항이 령이라고 할 때 이 매질의 전기상수는 $\varepsilon = 9\times10^{-12}\mathrm{C^2/(N\cdot m^2)}$, 밀도는 $\rho = 9\times10^3\mathrm{kg/m^3}$이며 공기저항을 무시한다. 원판이 자기마당속에서 떨어지는 가속도가 자기마당이 없을 때보다 1/1 000로 작아지게 하기 위해서는 B가 얼마여야 하는가?

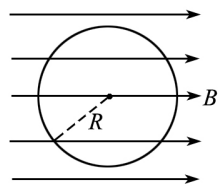
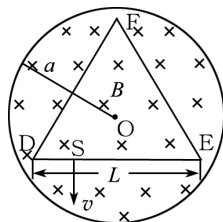



그림 1-17-10

10. 그림 1-17-10과 같이 반경이 a인 원기둥공간에 자기유도가 B인 고른자기마당이 있고 그 방향도 축에 평행이다. 원기둥공간에 수직인 평면안에 절연재료로서 한변의 길이가 $L=1.6a$인 바른3각형구조물을 고정시켜놓았다. 이것의 중심은 원기둥의 축에 있다. 변 DE우의 점 S는($\overline{\mathrm{DS}}=\frac{1}{4}L$) 대전립자들을 내쏘는 원천이다. 발사된 대전립자들의 방향은 다 그림의 자름면안에서 변 DE에 수직인 아래방향으로 향한다. 발사되는 립자의 전기량은 다같이 q이다.($q>0$) 질량도 모두 m인데 속도 v만 서로 다른 값들을 가진다. 이 립자들과 3각형구조물과의 충돌은 완전튐성충돌이며 매번 충돌할 때 속도방향은 부딪치는 변에 수직이다.

1) 대전립자의 속도 v가 얼마일 때 S점에서 출발한 립자들이 다시 S점에로 되돌아오겠는가?

2) 이 립자들이 S점에 돌아올 때 걸리는 가장 짧은 시간은 얼마인가?

제18장. 광 학

I

1. 어떤 점광원 S가 평면거울에 의해 영상을 이루고있다. 광원은 움직이지 않고 평면거울이 속도 v로 OS방향을 따라 점광원쪽으로 평행이동한다. 거울면과 OS방향사이의 각은 30°이며 광원의 영상 S′는 ( )

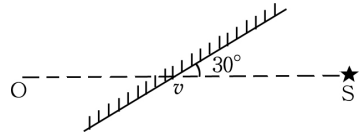



그림 1-18-1

1) 속도 $0.5v$로써 련결선 S′S를 따라 S쪽으로 이동한다.
2) 속도 v로써 련결선 S′S를 따라 S쪽으로 이동한다.
3) 속도 $\sqrt{3}v$로써 련결선 S′S를 따라 S쪽으로 이동한다.
4) 속도 $2v$로써 련결선 S′S를 따라 S쪽으로 이동한다.(그림 1-18-1)

2. 그림 1-18-2는 두개의 서로 다른 색빛을 써서 꼭같은 쌍실틈간섭장치로 실험을 하여 얻어낸 간섭무늬이다.(어두운 부분은 밝은 무늬를 표시하며 공백부분은 어두운 무늬를 표시한다.) 아래의 설명중에서 정확한것은 ( )

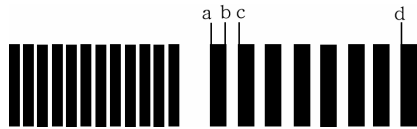



그림 1-18-2

1) 왼쪽 무늬에 대응한 색빛의 주파수가 비교적 낮다.
2) 왼쪽 무늬에 대응한 색빛의 파장이 비교적 작다.
3) 오른쪽 무늬의 짧은 선 bc사이의 거리는 서로 이웃한 밝은 무늬사이의 거리이다.
4) 오른쪽 무늬의 짧은 선 ac사이의 거리는 서로 이웃한 밝은 무늬사이의 거리이다.

3. 그림 1-18-3에서 보여준것은 얇은 막에서의 빛의 간섭을 리용하여 어떤 두께를

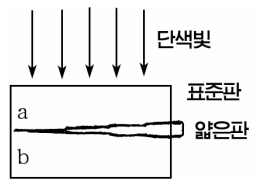



그림 1-18-3

가진 유리판의 웃걸면이 평면인가 아닌가를 검열하는 장치이다. 리용하는 단색빛은 보통광원에 빛거르개를 붙여얻은것이다. 검사에서 관측된 간섭무늬는 어느 두 면에서 반사된 빛의 중첩으로 생겨나는가?( )

1) a의 웃걸면과 b의 아래걸면
2) a의 웃걸면과 b의 웃걸면
3) a의 아래걸면과 b의 웃걸면
4) a의 아래걸면과 b의 아래걸면

4. 그림 1-18-4는 스펙트르촬영기의 원리도이다. 광원에서 나온 빛은 실틈 S와 볼록렌즈 L을 지난 후 평행빛선을 이루며 프리즘 P우에 떨어진다. 사진건판 MN우에 깨끗한 스펙트르가 찍히게 하기 위하여 P와 MN사이에 반드시 한개의 □를 놓아야 한다. 노란색, 붉은색, 푸른색 3가지 빛의 스펙트르는 사진건판에서 M으로부터 N까지 차례로 □이다.

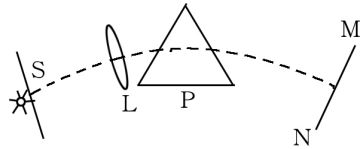



그림 1-18-4

5. 그림 1-18-5는 복도를 보여주는데 그 천정은 매우 큰 평면거울로 이루어졌고 평면거울과 땅면은 평행이며 땅면에는 직각형의 물체를 놓았다. 물체의 왼쪽에 점광원 S가 있다. 작도법으로 물체의 오른쪽에서 광원 S에 의해 밝아진 부분을 그려라.

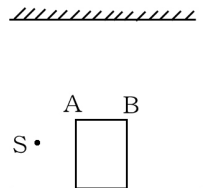



그림 1-18-5

6. 비가 온 뒤 하늘이 개이면 사람들은 자주 하늘에 비낀 무지개를 볼수 있다. 그것은 해빛이 공기중의 물방울에서 반사될 때 나타나는 현상이다. 이 현상을 설명할 때는 빛선이 물방울에 입사할 때의 빛선행로를 분석해야 한다. 빛선이 물방울에 입사할 때 물방울은 반경이 R인 구로 볼수 있다. 구중심 O에서 입사빛선에 수직인 거리는 d이고 물의 굴절률은 n이다.(그림 1-18-6)

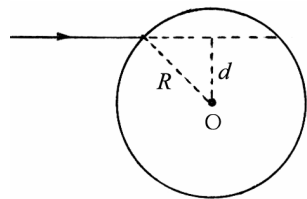



그림 1-18-6

1) 그림에서 입사빛선이 물방울에서 1차반사된 후 물방울에서 나오는 빛행로를 그려라.

2) 이 빛선이 물방울의 매 부분에서 매번 편차되는 각도를 구하여라.

7. 초점거리가 f인 볼록렌즈의 초점에 점광원을 놓았다. 렌즈 반대쪽의 초점거리의 2배되는 곳에 빛축에 수직인 영사막을 놓았다. 영사막에 반경이 R인 밝은 원이 얻어졌다. 렌즈와 영사막을 움직이지 않고 빛축우에서 점광원을 움직인다. 만일 영사막의 밝은 원의 반경이 $R/2$로 된다면 이 점광원은 어느 위치에 있어야 하는가?

II

8. 어두운 방안에서 광원 S는 가운데에 작은 구멍 A가 있는 종이판을 지나 빛선을 형성한다. 가위를 빨갛게 달구어 그림과 같이 빛선에 가져간다. 이때 가위부근의 빛선이 갑자기 끊어져 작은 검은 구역을 형성하며 그 뒤로 본래의 빛선이 나타난다. 즉 가위부근에서 빛선이 《잘리운》것처럼 볼수 있다. 이 현상을 어떻게 해석할수 있는가?(그림 1-18-7)

S A

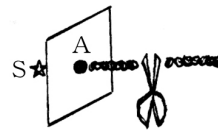



그림 1-18-7

9. 어떤 사람이 초점거리가 10cm, 직경이 4cm인 얇은 렌즈로 방안지를 관찰한다. 매 네모칸의 변의 길이는 0.3cm이다. 그는 렌즈의 빛축이 방안지와 수직을 이루게 하고 렌즈와 종이면사이의 거리를 10cm로 하였다. 눈은 빛축우에서 렌즈와 5cm 되는 곳에 있다. 그는 최대로 몇개의 완전한 네모칸을 볼수 있는가?

10. 어떤 라지오천문대의 수신기는 바다물면에서 $h=2$m 되는 곳에 놓여있다. 복사파장이 λ인 전자기파를 내보내는 라지오파별이 지평선우에 떠오르기 시작해서부터 수신기는 끊임없이 최대값과 최소값을 기록한다.

1) 최대값과 최소값을 관찰했을 때 전자기파의 방향을 확인하여라. 방향은 수평면에 대한 각도 θ로 표시하여라.

2) 라지오파를 복사하는 별이 지평선우에 방금 출현했을 때 수신기가 기록하는 신호가 센가, 약한가?

11. 그림 1-18-8은 얇은 집초렌즈에서 굴절된 빛선행로 ABC와 렌

즈의 뒤초점 F를 보여준다. 콤파스와 직선자(눈금이 있는)를 리용하여 렌즈가 있는 자리와 그 주빛축을 그려라.

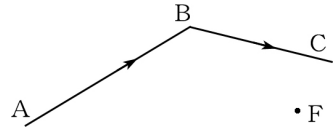



그림 1-18-8

Ⅲ

12. 유리그릇에 있는 액체가 중심축주위를 등각속도로 돌아간다. 액체의 굴절률은 4/3이다. 파장이 $\lambda = 610\text{nm}$인 단색빛이 수직으로 입사할 때 중심에 밝은 무늬가 생긴것을 관찰하였다. 제20번째 밝은 무늬의 반경은 10.5mm이다. 액체가 돌아가는 각속도는 얼마인가?

13. 그림 1-18-9와 같이 전반사프리즘의 웃쪽 6cm 되는 곳에 물체 AB를 놓았다. 프리즘의 직각변의 길이는 6cm이고 프리즘의 오른쪽 10cm 되는 곳에는 초점거리가 $f_1 = 10\text{cm}$인 볼록렌즈를 놓았다. 볼록렌즈의 오른쪽 15cm 되는 곳에 다시 초점거리가 $f_2 = 12\text{cm}$인 오목렌즈를 놓았다. 이 광학계통이 형성하는 영상의 위치와 배률을 구하여라.(전반사프리즘의 굴절률 $n = 1.5$)

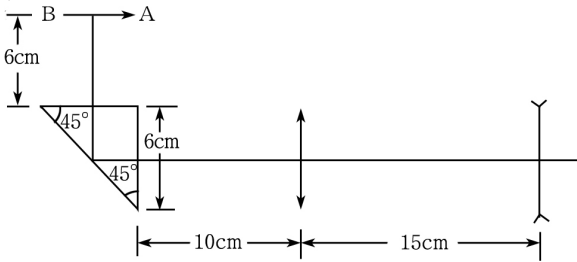



그림 1-18-9

14. 그림 1-18-10에서 유리의 굴절률의 x의 변화에 따르는 규칙은

$$n(x) = \frac{n_0}{1 - \dfrac{x}{r}}$$

그중 $n_0 = 1.2$, $r = 13\text{cm}$이다. 빛선이 $x = 0$인 곳에서 y를 따라 입사할 때

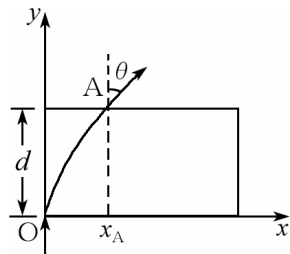



그림 1-18-10

평판유리를 지난 후 점 A에서 나온다. 이것이 유리판의 법선 방향과 이루는 각은 $\theta = 30°$이다.

1) 평판유리에서 빛선의 경로를 구하여라.
2) 빛선이 나오는 점 A에서 유리판의 굴절률을 구하여라.
3) 유리판의 두께 d를 구하여라.

제19장. 현대물리초보

I

1. 풀색빛이 빛전자판에 들어왔을 때 빛전기현상이 나타났다. 빛전자가 음극으로부터 나올 때 운동에네르기가 최대로 되게 하려면 ( )

1) 붉은색빛으로 바꾸어야 한다.
2) 풀색빛의 세기를 크게 해야 한다.
3) 빛전기현상의 가속전압을 크게 해야 한다.
4) 자외선빛으로 바꾸어야 한다.

2. 바닥상태의 수소원자가 어떤 단색빛을 받아 내보내는 빛의 파장은 λ_1, λ_2, λ_3의 3개의 단색빛이다. $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$이다. 이때 입사하는 빛의 파장은 ()

1) λ_1　　2) $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$　　3) $\dfrac{\lambda_2 \cdot \lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_3}$　　4) $\dfrac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$

3. 일반적으로 양성자와 중성자는 u쿼크와 d쿼크의 두가지 종류의 쿼크로 되였다고 본다. u쿼크의 전기량은 $\dfrac{2}{3}e$이며 d쿼크의 전기량은 $-\dfrac{1}{3}e$이다. e는 전기소량이다. 아래의 론리적인 판단에서 정확한것을 찾아내여라.

1) 양성자는 한개의 u쿼크와 한개의 d쿼크로 되여있으며 중성자는 한개의 u쿼크와 2개의 d쿼크로 되여있다.
2) 양성자는 두개의 u쿼크와 한개의 d쿼크로 되여있고 중성자는 한개의 u쿼크와 두개의 d쿼크로 되여있다.

3) 양성자는 한개의 u쿼크와 두개의 d쿼크로 되여있고 중성자는 두개의 u쿼크와 한개의 d쿼크로 되였다.

4) 양성자는 두개의 u쿼크와 한개의 d쿼크로 되여있고 중성자는 한개의 u쿼크와 한개의 d쿼크로 되여있다.

4. 보아의 수소원자모형에서 전자의 제1려기준위 (책에서 제일 가까운 선)의 자리길반경은 r_1이다. 여기로부터 바깥으로 향한 제3려기준위의 자리길반경은 $r_3 =$ ___, 전자가 제3려기준위에서 운동할 때의 운동에네르기는 $E_k =$____, 전기소량은 e이고 전기힘의 결수는 k이다.

5. 태양내부의 핵에서는 대량의 에네르기를 내보낸다. 이러한 에네르기는 전자기복사의 형태로 사방으로 복사되여나간다. 그의 총일능률이 $P_0 = 3.8\times10^{26}$W에 달한다.

1) 태양이 1s당 몇t의 질량을 잃어버리는가를 계산하여라.

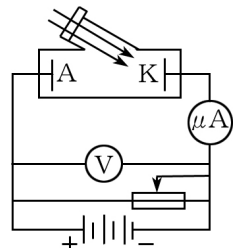
2) 태양속에서 핵반응은 $4\,{}_1^1\mathrm{H} \rightarrow {}_2^4\mathrm{He} + 2\nu + 28\mathrm{MeV}$형식의 반응이다.($\nu$는 중성미자인데 그의 질량은 전자의 질량보다 매우 작으며 투과능력이 대단히 세다.) 지구와 태양사이의 거리 $L = 1.5\times10^{11}$m라면 매 1s당 태양빛에 수직인 지구겉면 $1\mathrm{m}^2$에 몇개의 중성미자가 도달하겠는가?

3) 원시태양이 양성자와 전자로 이루어졌다고 하고 10%의 양성자가 《탄다》고 하면 태양의 수명을 계산하여라.

6. 방사성동위원소를 리용하여 의학검측을 할수 있다. 1mL의 방사성동위원소 ${}^{24}\mathrm{Na}$을 포함하고있는 용액을 인체내에 주사한다. 주사전에 이 용액이 매 1s당 2 000개의 방사성립자를 내보낸다는것을 측정하였다. 7.5h이 지난 뒤 인체내에서 1mL의 피를 꺼내여 1mL의 피가 1s동안에 방사성립자 0.24개를 내보낸다는것을 관측하였다. ${}^{24}\mathrm{Na}$의 반감기가 15h이라는것을 알고있을 때 인체안의 피의 전체 량을 계산하여라.

7. 빛전자관의 음극은 림계파장이 $\lambda_0 = 500$nm인 나트리움으로 만들었다. 파장이 $\lambda = 300$nm인 자외선을 음극에 쪼일 때 양극 A와 음극 K사이의 전위차는 $U = 2.1$V이고 빛전류의 포화값은 $I = 0.56\,\mu$A이다.(그림 1-19-1)

그림 1-19-1

1) 매 1s당 음극에서 나오는 전자의 개수를

구하여라.

2) 양극 A에 도달할 때 전자의 최대운동에네르기를 구하여라

3) 만약 전위차 U가 변하지 않을 때 쪼여준 빛의 세기가 원래 값의 3배로 될 때 나온 전자가 A에 도달할 때의 최대운동에네르기는 얼마인가?(플랑크상수 $h=6.63\times10^{-34}$J·s, 전자의 전기량 $e=1.6\times10^{-19}$C, 진공속에서 빛속도 $c=3\times10^{8}$m/s)

II

8. 량자론에 의하면 빛량자는 운동에네르기뿐아니라 운동량도 가지고있는데 그 계산식은 $P=h/\lambda$이다. 여기서 h는 플랑크상수이며 λ는 빛량자의 파장이다. 빛량자는 운동량을 가지므로 물체 겉면에 부딪쳐 물체에 흡수되거나 반사될 때 물체에 압력을 준다. 이것을 빛압력이라고 한다.

1) 이산화탄소레이자가 내보내는 레이자빛의 일능률은 P_0=1 000W이고 나오는 빛의 가로자름면적은 $S=1\text{mm}^2$이다. 이것이 어떤 물체의 겉면에 수직으로 입사할 때 이 물체에 주는 빛압력은 최대로 얼마인가?

2) 빛이 물체에 쪼여질 때 물체에 빛압력을 주므로 어떤 사람이 먼 우주에서 탐측할 때 빛압력을 리용하여 위성을 가속시킬수 있다고 생각하였다. 탐측기에 면적이 매우 크고 반사률이 매우 높은 엷은 막을 씌워 태양과 정면으로 되게 한다. 지구가 태양주위를 돌아갈 때 매 1m^2의 면적에 도달하는 태양빛에네르기는 1.35kW이다. 탐측기의 질량은 $M=50$kg이고 엷은 막의 면적은 $4\times10^{4}\text{m}^2$이다. 이때 탐측기가 얻게 되는 가속도는 얼마인가?

9. 주파수가 v_0인 빛량자가 지구겉면으로부터 수직우에로 운동할 때 지구의 끌힘작용으로 그의 파장이 변화된다. 우리는 이런 현상을 끌힘에 의한 붉은색변위라고 부른다. 아래의 문제를 분석하여라.

1) 빛량자에네르기에 대한 식은 어떻게 표시되는가?

2) 아인슈타인의 질량과 에네르기사이 관계식은 무엇인가?

3) 우의 두 식으로부터 빛량자의 질량 m을 구하여라.

4) 에네르기보존의 관점에서 빛량자의 이동거리가 $\Delta H=22.5\text{m}$ 인 때에 이 빛량자의 주파수의 붉은색변위량 $\Delta\nu$ 와 처음주파수 ν_0 사이의 비를 구하여라.

10. μ 중간자의 정지질량은 전자정지질량의 207배이다. 정지했을 때의 평균수명은 $\tau_0=2\times10^{-6}\text{s}$이다. 그것이 실험실의 기준계에서 수명이 $\tau=7\times10^{-6}\text{s}$라면 그 질량은 전자의 정지질량의 몇배로 되겠는가?

11. 바닥상태에 있는 두 수소원자가 서로 충돌할 때 비륀성충돌을 할수 있는 제일 작은 속도는 얼마인가? 수소원자의 질량은 $1.67\times10^{-27}\text{kg}$이고 이온화에네르기는 $E=13.6\text{eV}=2.18\times10^{-18}\text{J}$

12. 원자로에서 보통 흑연을 감속재로 리용한다. 우라니움이 분렬되여 생겨나는 빠른 중성자는 탄소핵과의 끊임없는 충돌로 속도가 작아진다. 중성자와 탄소핵사이의 충돌이 완전튄성충돌이면 충돌전에 탄소핵이 정지상태에 있을 때 충돌후의 중성자와 탄소핵의 속도는 충돌전의 중성자의 속도와 꼭같은 한 직선우에 있다. 탄소핵의 질량은 중성자질량의 12배이다. 중성자의 원래 에네르기가 E_0인 때

1) 1차 충돌후에 중성자의 에네르기는 얼마로 변하는가?

2) 만일 $E_0=1.75\text{MeV}$라면 몇번 충돌한 후에 중성자의 에네르기가 0.025eV로 되겠는가?

Ⅲ

13. 1884년에 발마는 보임빛선대역의 수소원자스펙트르를 연구하였다.(이후에 이것을 발마계렬이라고 불렀다.) 이 계렬은 장파끝으로부터 시작한 4개의 스펙트르파장 λ와 스펙트르의 짧은 파장쪽에서의 한계파장 λ_0 으로 구성되여있는데 그 측정값들은 656.21nm, 486.074nm, 434.01nm, 410.12nm, 364.56nm였다. 발마는 이 계렬의 파장 λ를 아래한계파장 λ_0으로 나누어 유효수자의 정확도로 다음 식을 얻었다.

$$\frac{656.21}{364.561}=\frac{9}{5},\quad \frac{486.074}{364.561}=\frac{4}{3}$$

$$\frac{434.01}{364.561}=\frac{25}{21},\quad \frac{410.12}{364.561}=\frac{9}{8},\quad \cdots$$

이로부터 이 실험의 실험공식을 유도하여라. 그리고 리드베르그상수를 구하여라.

14. 바닥상태 He^+의 이온화에네르기는 $E=54.4\text{eV}$이다.

1) 바닥상태의 He^+가 려기상태로 되자면 자연입사빛의 최소에네르기가 얼마여야 하는가?

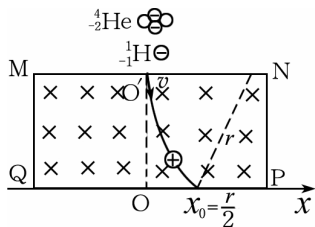
2) He^+가 우에서 서술한 려기상태에서 바닥상태로 이행할 때 만일 이 이온의 반작용을 고려하는 경우와 반작용을 고려하지 않는 경우 그것이 내보내는 빛파장변화의 백분률은 얼마인가?

He^+의 에네르기 E와 n의 관계는 수소원자의 에네르기공식과 비슷하다. 전자의 전기량 $1.6\times10^{-19}\text{C}$이면 양성자와 중성자의 질량은 $1.67\times10^{-27}\text{kg}$이다. 계산식에서 합리적인 근사를 할수 있다.

15. 어떤 우주탐측기가 우주에 반물질과 검은구멍이 있는가, 없는가를 탐측하였다.

1) 반물질탐색방법

물질의 원자는 양전기를 띤 원자핵과 핵밖에 음전기를 띤 전자로(e^-) 이루어졌다. 원자핵도 양성자 (p^+)와 중성자 (n^0)로 구성되여있다. 실례로 ${}_{1}^{1}\text{H}=p^+$, ${}_{+2}^{4}\text{He}=2p^+ +2n^0$이다. 반대로 반물질의 원자는 (반원자) 음전기를 띤 원자핵과 핵밖의 양전기를 띤 양전자 (e^+)로 이루어져있다. 반중성자도 반양성자 (P^-)와 반중성자 $(\overline{n^0})$로 구성되여있다. 례로 ${}_{-1}^{1}\text{H}=p^-$, ${}_{-2}^{4}\text{He}=2p^- +2\overline{n^0}$이다. p^+, n^0, e^-와 대응하여 $p^-, \overline{n^0}, e^+$는 **반립자**라고 부른다. 반립자는 대응한 립자와 완전히 같은 질량을 가지며 반대되는 전자기성질을 가진다. 그러므로 아래와 같은 방법으로 탐측할수 있다. 계산을 간단히 하기 위하여 그림 1-19-2의 ㄱ에서 립자 또는 반립자가 고른자기마당 B에 수직인 선$(\text{O}'\text{O})$를 따라 축이 놓이는 자름면 MNPQ의 자기스펙트르기에 들어올 때 속

도가 같다고 한다. 수소원자핵 $\left({}_{1}^{1}\mathrm{H}\right)$이 Ox축우에서 자리 x_0만큼 편기되였는데 그 자리길반경 r의 절반만큼 편기됐다. 반수소핵 $({}_{-1}^{1}\mathrm{H})$과 반헬리움핵 $({}_{-2}^{4}\mathrm{He})$의 자리길 및 그것이 Ox축우에서 편기된 자리를 x_1와 x_2이라고 하자.

만일 예언이 정확하다면 사람들이 이런 자리길을 관측하면 반수소와 반헬리움의 핵을 관측할 수 있는가를 증명해보아라.

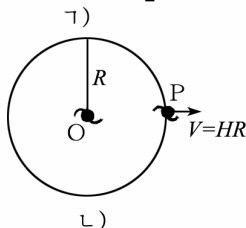



그림 1-19-2

2) 검은구멍의 탐색방법

검은구멍이라는것은 우주에서 빛을 내보내지도 반사하지도 않는 일종의 물질을 의미하는데 때문에 이 물질을 관측하기 힘들다. 그러나 검은구멍에서도 물질과 같이 만유인력법칙이 작용한다. 천문학에서 검은 구멍의 질량은 우주총질량의 90%로부터 99%를 차지한다. 만약 자기스펙트르기를 리용하면 검은 구멍을 관측할수 있는데 이로부터 우주에서 물질의 총평균밀도 ρ를 측정할수 있다. 그러면 우리는 아래에 서술하는 원리에 따라 우주팽창에 대하여 예언할수 있다. 우주팽창현상은 20세기 30년대에 발견되였다. 우주에서 한 은하계(례를 들어 O)에서 임의의 방향을 볼때 기타 은하계들은 그로부터 멀어지고있으며 하불속도(리탈속도)는 거리 R에 비례한다. 즉 $v=HR$ (그림 1-19-2의 ㄴ) H는 하불상수라고 하며 그 단위는 1 000m/$(\mathrm{s}\cdot\ell\mathrm{y})$이다.

① 만일 우주가 모든 방향으로 꼭같은 성질을 가지며 그 밀도를 ρ라고 하자. 질량이 m인 은하계 P가 관측자 O로부터 먼곳에 있을 때 우주의 모든 기타 물질이 그에 주는 끌힘은 얼마인가?

② 만일 질량이 m인 은하계 P에서 O점에 의한 끌힘의 자리에네르기가 $E_p=\frac{GMm}{R}$ (M은 그림 1-19-2의 ㄴ에서 구면안의 물질의 질량) 행성계 P의 총에네르기 E는 운동에네르기와 끌힘의 자리에네르기의 합과 같다. $E=0$

인 때 우주의 밀도는 $\rho_c = \dfrac{3H^2}{8\pi G}$ 임을 증명하여라.

③ 우주의 물질밀도 ρ 와 우에서 서술한 ρ_c 의 크기를 비교하여 우주팽창에 대해 예언할수 있다. 즉 끊임없이 팽창한다든지, 미래의 어떤 순간에 팽창이 정지되는가, 변화되는가 또 수축되는가를 설명해보아라.

제20장. 광학과 현대물리초보 종합문제

1. 한 물리연구소조가 아래와 같은 실험을 하였다. 6×10^4 kg의 철을 깊은 갱에 넣어 우주선의 영향을 완전히 차단하고 철옆에는 수많은 탐측기를 설치하였다. 철핵속의 핵자(양성자, 중성자)가 스스로 붕괴되는것을 측정하였다. 반년동안에 3개의 핵자가 붕괴되는 현상을 기록하였다. 평균수명이 τ 인 립자가 N_0개 있을 때 t 시간이 지난뒤 립자수가 $N = N_0 e^{-t/\tau}$ 개로 되였다. 우의 사실에 기초하여 핵자의 평균수명을 계산하여라.(핵자의 질량은 $m = 1.66\times10^{-27}$ kg, $0 < x \le 1$ 인때 $e^{-x} \approx 1 - x$)

2. 그림 1-20-1과 같이 3각형프리즘에서 각 α 는 60°이고 3각형프리즘의 대칭자리에 초점거리가 $f = 30$ cm 인 두개의 완전히 꼭같은 볼록렌즈 L_1 와 L_2 을 놓았다. 만일 L_1 의 앞초점면에 빛축의 아래방향으로 $y = 14.3$ cm인 거리에 단색광원 S를 놓았다면 그의 영상 S′와 S가 이 광학계에서 왼쪽과 오른쪽에서 대칭이다. 이 3각형프리즘의 굴절률을 구하여라.

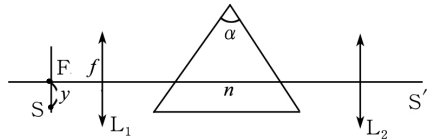



그림 1-20-1

3. 유리프리즘의 굴절률 n을 측정하기 위하여 그림 1-20-2와 같은 장치를 리용하였다. 프리즘이 투광렌즈

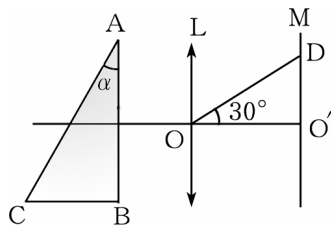



그림 1-20-2

의 앞에 놓여있다. 변 AB는 투광렌즈의 빛축에 수직이다. 투광렌즈의 뒤면에는 가림막이 놓여있다. 산란빛을 면 AC우에 쪼일 때 가림막우에는 밝은 구역과 어두운 구역이 생긴다. 이 두 구역의 경계(D점)와 렌즈의 중심 O를 맺는 OD는 렌즈의 빛축 OO′와 30° 의 각을 이룬다. 프리즘의 굴절률 n을 구하여라. 프리즘의 정각은 $\alpha = 30^\circ$이다.

4. 전자가 $n+1$번째 자리길에서 n번째 자리길에로 이행할 때 수소원자가 복사하는 빛의 주파수를 구하고 n이 대단히 클 때 고전적인 전자기리론의 결과에 따라 빛의 주파수와 n번째 자리길우의 회전주파수가 같다는것을 증명하여라.

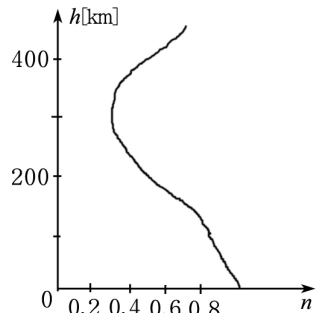
5. 전자의 자리의 불확정량이 이 전자파동의 파장과 같다면 상대론적효과를 무시할 때 전자의 속도의 불확정량이 그자체의 속도와 같다는것을 증명하여라.

6. 립자의 운동에네르기가 그 정지에네르기 E_0의 n배와 같을 때 립자의 속도와 운동량을 구하여라.

7. 이온층은 대기의 높은 층에서 공기분자가 빛우주선 및 기타선의 작용을 받이 이온화되여 형성된다. 무선전자기파의 굴절률 n이 1보다 작다는것을 고려하고 무선전자기파의 굴절률 n이 땅우에서의 높이 h에 따르는 변화규칙을 그림 1-20-3에 보여준다. 무선전자기파가 이온층에서 전파되면 기하광학의 규칙에 따라 서술할수 있다. 인공지구위성이 땅우에서 200km인 곳에서 비행하면서 무선전자기파를 내보내는 총일능률은 P_0이다. P_0에 대한 이온층의 일능률의 비 P/P_0의 값이 얼마인가를 계산하여라.

※ 땅이 수평면이라면 지구가 전자기파에 대해 똑같은 거울면반사를 하므로 에네르기 손실이 없다고 볼수 있다.

그림 1-20-3

※ 정각이 2α인 원뿔체에 대응하는 공간각은 립체각이라고 하며 Ω로 표시한다. Ω와 α의 관계는 공식 $\Omega = 2\alpha\left(1-\cos\alpha\right)$로 계산을 한다.

8. 얇은 볼록렌즈는 공기속에 있을 때 량쪽의 초점으로부터 렌즈

중심까지의 거리가 서로 같다. 만일 이 렌즈량쪽의 매질이 서로 다르면 그 굴절률도 각각 n_1와 n_2 이다. 렌즈량쪽에 초점들(F_1 와 F_2 이다.)이 있는데 이 점들로부터 렌즈중심까지의 거리 f_1와 f_2은 서로 다르다. 렌즈가 수평빛을 집초하였는데 그 량쪽매질의 굴절률 및 초점의 자리는 그림과 같이 표시된다.(그림 1-20-4)

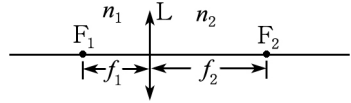



그림 1-20-4

1) 이때 물체까지의 거리 a, 영상사이거리 b, 초점거리 f_1, f_2 사이의 관계식을 끌어내여라.
2) 만일 한쪽의 빛선이 렌즈중심으로 들어온다면 그것이 렌즈의 주축과 이루는 각이 θ_1 인 때 그에 대응하여 나오는 선이 주축과 이루는 각 θ_2 은 얼마인가?
3) f_1, f_2, n_1, n_2 사이에는 어떤 관계가 있는가?

9. 우라니움족($4n+2$) 원소가 붕괴될 때 내보내는 방사선은 약한 투과능력을 가진다. ^{238}U 이 붕괴될 때 그속에서 약 0.7%가 높은 투과성을 가진 높은 에네르기의 빛량자를 내보낸다. 어느한 물체의 방사선을 측정하였는데 탐측기의 실지 측정효률이 0.25%이다.(즉 400개의 빛량자속에서 한개가 탐측기안에서 맥동을 일으킨다.) 탐측기의 수감부걸면적은 22cm^{2}이다. 한개의 걸면적이 점복사원이라고 여길수 있는 복사물로부터 1.5m의 거리에 있다. 측정할 때 단위시간마다 125개의 맥동을 감수하였다. 총제적인 복사량의 93%는 그 물체의 걸면에 흡수된다. 이 물체가 가지고있는 ^{238}U 의 함량을 계산하여라. ^{238}U 의 반감기는 $\tau = 4.5\times10^9$ a이다. 아보가드로수와 ^{238}U 의 원자량은 표를 찾아보아라.

10. 그림 1-20-5에서와 같이 L_1 와 L_2 은 같은 축을 가진 두개의 볼록렌즈이다. O′O 는 기본주축이고 L_1 의 초점거리는 $f_1 = 10$ cm , 직경은 $d_1 = 4$ cm이다. L_2 의 초점거리 $f_2 = 5$ cm, 직경은 $d_2 = 2$ cm이다. 두 렌즈사이

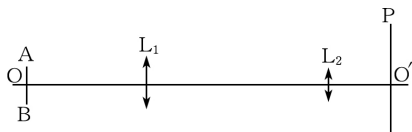



그림 1-20-5

의 거리 $l=30$ cm이다. AB는 렌즈와 같은 축을 가지는 직경 $d=2$ cm인 빛발광원판이다. 그것은 선명한 변두리를 가지고있다. 그것을 L_1 의 왼쪽 20cm 되는 곳에 놓았을 때 그것이 L_2 의 오른쪽에서 O′O 에 수직인 빛가림판 P 우에 영상을 형성한다.

1) 빛가림판을 어느 곳에 놓아야 하는가?

2) 빛가림판우에서 가운데부분은 밝고 테두리는 어둡게 되였다. 영상의 테두리부위로 중간부분과 같이 밝게 하기 위해서 영상의 자리와 크기를 변화시키지 않고 OO′ 축우에서 같은 축을 가진 얇은 볼록렌즈 L_3 을 넣었다. L_3 을 어느 곳에 놓아야 하는가? 직경은 얼마여야 하는가? 초점거리는 얼마인가?

올림픽경연모의문제 Ⅰ

1. 어떤 한 학생이 그림 1에 보여준것과 같은 《자동뽐프》를 구상하였다. 여기서 A, B, C는 각각 용기이고 D, E, F는 각각 가는 관이며 K는 변이다. A, B, C 와 관 D, E에는 물이 담겨져있고 용기들에서 물면의 높이차는 각각 h_1, h_2 이다. 용기 A, B, C의 가로자름면은 반경이 12cm인 원이며 관 D의 반경은 0.2cm이다. 이 《자동뽐프》의 구상자가 다른 학생에게 《이 장치에서 변 K를 열면 관의 출구로 물이 뿜어나올것이다.》라고 말하였다. 그러나 이말을 들은 학생은 그럴수 없다고 하면서 다음과 같이 물어보았다.《낮은 곳에 있던 물이 저절로 높은 곳으로 이동한다면 그 에네르기는 어디서 온것인가?》 이 말을 듣자 장치를 구상한 학생이 변 K을 열었다. 그러자 물이 실지 뿜어나오는것이 아니겠는가. 그럴수 없다고 하던 학생은 아연해져 아무말도 할수 없었다. 장치의 구상자는 계속하여 변 K를 열기 전에 먼저 관 D의 웃끝을 잡아당겨 충분히 길게 해놓고 그 다음 변 K를 여니 관속의 물면이 우로 올라오다가 어떤 위치에서 멎었다고 하였다. 다음의 물음에 대답하여라

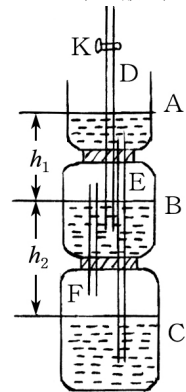



그림 1

1) 변 K를 열면 물기둥이 올라오는 원인이 무

엇인가?

2) 관 D 의 웃끝을 당겨 충분히 길게 해놓고 변 K를 열 때 관 속에서 정지된 물면과 용기 A에서의 물면의 높이차는 얼마인가?

3) 물기둥이 우로 올라올 때 요구되는 에네르기는 어디서부터 공급되는가?

2. 고정된 경사면이 있는데 경사각 $\theta=45°$, 경사면의 길이는 $L=2$m이다. 이 경사면의 맨 아래끝에는 경사면에 수직인 제동판이 붙어있다. 경사면의 맨 웃끝으로부터 질량이 m인 질점이 경사면을 따라 미끄러져내려오는데 질점의 처음속도는 령이다. 경사면과 질점사이의 미끄럼마찰결수는 $\mu=0.2$이다. 이 질점이 경사면 맨 밑에까지 미끄러져 내려오면 제동판과 퇸성충돌하여 반발한다. 이 질점이 운동하기 시작하여 제동판과 11번 충돌할 때까지 운동한 거리의 총합을 구하여라.

3. 자름면적이 S인 밀페된 기통이 질량이 M인 피스톤에 의해 Ⅰ, Ⅱ 두 부분으로 격리되여있다. 기통의 Ⅰ부분에는 포화수증기가, Ⅱ부분에는 질량이 m인 질소기체가 들어있으며 기통속에서 피스톤은 마찰없이 미끄러질수 있게 되여있다. 처음에 기통은 수평상태에 놓여있고 피스톤은 평형상태에 정지되여있으며 량쪽에 있는 기체들의 온도는 $T_0=373$K, 압력은 P_0이다.(그림 2의 ㄱ) 이 기통을 천천히 수직으로 세워놓았더니 량쪽기통의 온도는 여전히 T_0이였지만 수증기의 극히 일부가 액화되여 물로 변했다.(그림 2의 ㄴ) 물의 비증발열은 L, 수증기와 질소기체의 몰질량은 각각 μ_1, μ_2이다. 우의 전체과정에서 기통의 Ⅰ부분과 외부계사이에 교환된 열량을 구하여라.

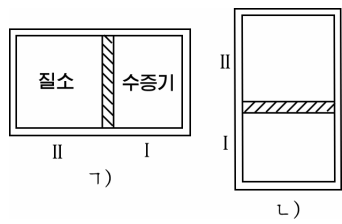



그림 2

4. 초점거리가 각각 f_1, f_2인 두개의 얇은 볼록렌즈가 공통빛축우에서 서로 d만큼 떨어져 배치되여있다.

1) 입사빛선과 렌즈계를 통하여 나가는 굴절빛선이 평행되자면 입사빛선이 어떤 조건을 만족해야 하는가?

2) 얻어진 결론에 근거하여 가능한 여러가지 경우의 빛행로들을 그림으로 그려보아라.

5. 전기량 q로 각각 균일하게 대전된 구 5개가 진공속에서 서로 접 P에서 내접하고있다.(그림 3) 이 구들의 반경은 각각 $R, \frac{R}{2}, \frac{R}{4}, \frac{R}{8}, \frac{R}{16}$ 이며 그것들의 중심은 각각 O_1, O_2, O_3, O_4, O_5에 있다. O_5과 O_1 사이의 전위차를 구하여라.

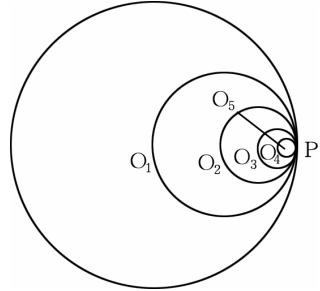



그림 3

6. 1997년 8월 26일에 진행된 국체천문학대회에서 도이췰란드 플랑크(Max Planek)학회의 한 연구조가 《은하계의 중심에는 하나의 커다란 검은 구멍이 존재할것이다.》라는 자기들의 연구결과를 발표하였다. 이들은 직경 3.5m인 천체망원경을 리용하여 은하계의 중심부근에 있는 오리온별자리의 한 항성에 대해 근 6년간에 걸쳐 진행한 관측자료에 근거하여 이러한 결론을 얻어냈다. 이들의 관찰결과에 의하면 은하계 중심으로부터 약 6×10^9 km의 거리에 있는 이 항성이 2 000 km/s의 속도로 은하계중심주위로 돌고있다. 우의 수자를 리용하여 고전력학적범위에서(문제밑에 준 참고 2를 보라.) 구체적계산과정을 통하여 은하계중심에 검은 구멍이 실지로 있는 경우 그의 최대반경이 얼마이겠는가를 구하여라.(만유인력상수 $G=6.67\times10^{-20}\,\mathrm{km^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}}$)

참고 1) 검은 구멍이란 밀도가 대단히 큰 천체의 한 종류이다. 이 천체겉면부근의 끌힘은 매우 강하므로 빛을 포함하여 임의의 모든 물질들이 이 끌힘에 의하여 검은구멍에 《먹히우고》만다.

참고 2) 이 계산에서 검은 구멍에 대한 라플라스의 고전모형을 리용할수 있다. 이 모형에 의하면 검은구멍의 겉면에 있는 모든 물질, 지어 처음속도가 빛속도 c인 빛량자도 검은 구멍의 끌힘에 의하여 그로부터 《탈출》할수 없다.

7. 많은 경우 비전기적물리적량들을 측정할 때 그에 알맞는 장치들을 리용하여 그 량들을 전기적량들도 변화시켜 측정한다. 평판축전기의 두 극판이 미끄러운 수평면우에 수직으로 서 있다. 이 극판의 면적은 S, 극판사이의 간격은 d이다. 극판 1은 고정된 상태에서 외부와 절연되여있고 극판 2는 접지된 상태에서

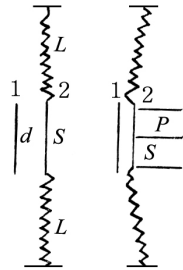



그림 4

극판 1과 평형을 유지하면서 수평면우에서 미끄러질수 있다. 그리고 극판 2의 아래우쪽에는 퇸성결수가 k 이고 길이가 L 인 두개의 꼭같은 용수철들이 달려있는데 그것들의 다른 한 끝들은 고정되여있다.(그림 4) 먼저 이 축전기극판사이의 전압이 U 로 될 때까지 충전을 시킨 후 전원을 차단한다. 그 다음 극판 2의 오른쪽 면으로부터 왼쪽으로 향하는 균일한 압력 P 를 주어 두 극판사이의 거리를 약간 변화시킨다. 이때 두 극판사이의 전압변화량이 ΔU 로 측정되였다. 극판 2의 정전기적작용이 용수철의 변형에 영향을 미치지 않는다고 보고 압력 P 를 구하여라.

8. 최근년간에 수십～수백t의 중량물을 드는 새로운 형의 《평형기중기》가 널리 리용되고있는데 그의 기본구조를 그림 5에 보여주었다. 이 기중기는 기본장치들로서 전동장치, 여러개의 팔, 회전축, 기둥으로 구성되여있다. ABD, DEF, BC, CE 네개의 팔들은 평형4변형구조를 이루고있어서 점 D, E, C, B는 어떤 경우에도 평형4변형의 정점들로 된다. A위치에 있는 수평회전축이 전동기에 의해 돌게 되여있고 전동기를 돌려 수직통안에 설치된 각이한 수직위치를 선택하는 방법으로 F위치에 걸린 중량물의 높이를 조절한다. 팔 ABD는 수직평면내에서 축주위로 마찰없이 돌아갈수 있다. C점은 미끄러운 수평홈을 따라 움직이게 된 련결점이며 팔 BC와 EC는 C축주위로 수직평면안에서 돌아갈수 있다. 팔들을 련결한 고정축들에서의 마찰은 무시할수 있다. 팔 AD의 길이를 l_1, AB의 길이를 l_2, DF길이를 l_3, BC길이를 l_4, BD의 길이를 l_5 로 표시하자.

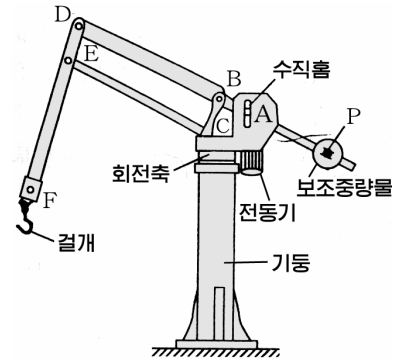



그림 5

1) 매개의 팔들을 매우 가벼운(중량을 무시할수 있는) 강체로 보는 경우 그림에 표시한 보조중량물이 없을 때 l_1, l_2, l_3, l_4 들사이에 어떤 관계가 성립되여야 평형기중기의 걸개(여기에 걸린 중량물을 포함하여)가 같은 평면우의 서로 다른 위치에 있을 때 평형기중기가 언제나 평형상태에 있게

되겠는가?

2) 매개 팔들의 자체중량을 고려하는 경우에 평형기중기의 걸개(여기에 걸린 중량을 포함)가 같은 평면우의 서로 다른 위치에 있을 때 평형기중기가 언제나 평형상태에 놓이게 하려면 팔 ABD의 P위치에 보조중량물의 무게를 G_p, 팔 AD, DF, BC, CE의 무게를 각각 G_1, G_3, G_4, G_5 라고 하자. P부분의 무게는 무시할수 있다고 하자. 그리고 l_1, l_2 l_3, l_4, l_5 는 이미 알고있을뿐아니라 $l_1 = l_3$ $l_2 = l_4$ 일 때 보조중량물의 무게 G_p 는 얼마여야 하는가?

올림픽경연모의문제 II

1. 최근년간 봄과 여름에 내몽골지방에서는 심한 황사현상들이 나타나고있다. 모래먼지바람이 불어 대기중에 섞이는 과정은 다음과 같다. 땅면에 수직웃방향으로의 바람속도가 v 일 때 모래먼지들이 바람과 함께 날려 올라가 움직이지 않고 대기중에 떠있게 된다. 이때 황사먼지들에 주는 바람의 작용을 마치도 공기는멎어있고 먼지알갱이들이 v 의 속도로 수직아래방향으로 내려올 때 그가 받게 되는 저항으로 볼수 있다. 이 저항은 다음의 식으로 표시된다.

$$f = \alpha \rho A v^2$$

여기서 α 는 비례결수, A는 먼지알갱이의 자름면적, ρ 는 공기의 밀도이다.

1) 황사알갱이들의 밀도가 $\rho_s = 2.8\times10^3$ kg/m^{3}이고 알갱이는 구모양이면서 그 반경이 $r = 2.5\times10^{-4}$ m, 지구결면근방의 공기밀도가 $\rho_0 = 1.25\times10^{-4}$ kg/m^3 , $\alpha = 0.45$ 라고 할 때 지구결면근방에서 황사를 일으킬수 있는 속도 v 의 최소값 v_1 를 구하여라.

2) 공기의 밀도는 높이 h 에 따라 $\rho = \rho_0(1 - ch)$ 관계에 따라 변한다. 여기서 ρ_0 은 $h = 0$ 인 위치(땅면)에서의 공기밀도, c 는 상수로서 $c = 1.18\times10^{-4}$ m^{-1}이다. $v = 9$ m/s일 때 황사먼지가 떠오르는 높이를 구하여라.(높이에 따르는

중력가속도의 변화는 고려하지 말아라.)

2. 수평인 눈우에서 두대의 눈썰매를 리용하여 질량이 m, 길이가 l인 짐을 싣고 끌고간다. 이때 짐은 수평상태를 유지하고있다. 이 내용을 간단히 그림 6에 보여주었다. 매개 썰매의 웃부분 A와 짐의 끝부분들은 고정되여있고 썰매의 아래부분 B들은 눈판에 접촉되여있으며 이 접촉부분의 면적은 매우 작다. 눈판으로부터 h의 높이에서 앞에 있는 썰매에 힘 F를 수평방향으로 주어 끌어당긴다. 이때 앞에 있는 썰매와 눈판사이의 미끄럼마찰결수는 μ_1, 뒤썰매와 눈판사이의 미끄럼마찰결수는 μ_2이다. 두 썰매가 다 눈판에 접촉된 상태에서 눈판우를 등속운동하려면 h가 어떤 조건을 만족해야 하겠는가? 수평방향의 끌힘 F의 크기는 얼마여야 하겠는가?(썰매의 질량은 무시하여라.)

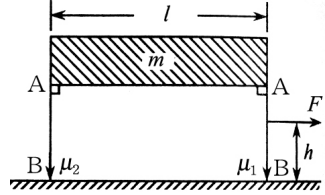



그림 6

3. 그림 7에서 보여준것처럼 자름면적이 같은 두개의 원통모양의 용기가 있는데 오른쪽 용기의 높이는 H이고 웃부분은 밀페되여있으며 왼쪽 용기의 웃부분에는 마찰없이 오르내릴수 있는 피스톤이 설치되여있다. 두 용기는 변이 설치된 가는 관으로 련결되여있으며 용기들과 피스톤, 련결관들은 모두 단열되여있다. 처음에 변을 막과 왼쪽 용기속에 온도가 T_0인 1원자분자리상기체를 넣었는데 평형상태에서 용기바닥과 피스톤까지의 높이가 H였다. 이때 오른쪽 용기는 진공상태에 있었다. 이제 변을 천천히 열면 피스톤이 서서히 내려오면서 평형상태에 이르게 된다. 이때 왼쪽 용기속에서 피스톤의 높이와 기체의 온도를 구하여라.

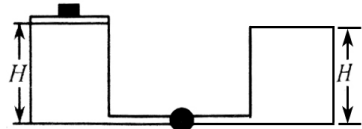



그림 7

참고: 1원자분자기체 1mol의 내부에네르기는 $\frac{3}{2}RT$이다. 여기서 R는 기체상수, T는 기체의 절대온도이다.

4. 직경이 1mm인 초전도선으로 반경이 5cm인 원형고리를 만들었다. 이 고리가 초전도상태에 있을 때 고리로 흐르는 전류의 세

기가 100A였는데 1년이 지난 후 측정해본 결과에 의하면 전류의세기의 변화량이 10^{-6}A 보다 크지 않았다. 이 초전도재료의 저항값의 자리수웃한계가 얼마인가를 대략적으로 계산하여라.

참고: 반경이 r 인 원형고리로 전류 I 가 흐를 때 고리중심에서 자기유도는 $B=\frac{\mu_0 I}{2r}$ 이다. 여기서 B, I, r 는 국제단위계로 표시된것이며 $\mu_0=4\pi\times10^{-7}\text{NA}^{-1}$ 이다.

5. 한쪽 면은 평면이고 다른쪽 면은 볼록한 볼록렌즈(이것을 평면-볼록렌즈라고도 부른다.)의 초점거리가 f 이다. 이 렌즈의 평면에 은(Ag)도금을 한 다음 볼록면쪽의 $2f$ 만 한 거리에 높이가 H 인 물체를 빛축에 수직으로 세워놓았다.(그림 8)

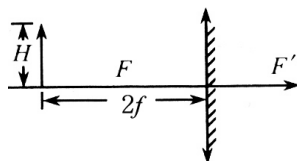



그림 8

1) 이 물체의 영상을 작도법으로 그리고 이 영상이 허영상인가 아니면 실영상인가를 밝혀라.

2) 이 영상의 위치와 크기를 계산하여라.

6. 질량이 M 이고 반경이 R 이며 질량분포가 균일한 밀도가 큰 항성의 중심으로부터 $r(r\geq R)$만 한 거리에 질량이 m 인 질점이 놓여있을 때 만유인력포텐샬은 $E_p=-G\frac{Mm}{r}$ 이다. 여기서 $G=6.67\times10^{-11}\text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$는 만유인력상수이다.우에서 말한 항성은 중성자별인데 그의 반경 $R=10\text{km}$, 질량 $M=1.5M_{태}$ ($M_{태}=2\times10^{30}\text{kg}$이다. 관찰되고있는 맥동별들이 다름아닌 중성자별들이다. 중성자별은 련속적으로 전자기파를 복사하고있는데 자기축방향으로의 복사가 가장 강하다. 그런데 중성자별에서 자기축방향과 자체회전(자전)방향이 서로 다르므로 그림 9에서와 같이 그들사이에 일정한 각도를 이루고있다. 지구에 설치한 수신기들에서 측정되는 주기적인 맥동전자기파는 바로 이러한 중성자별이 복사하는 전자기파인것이다. 그러면 지구상에서 수신되는 맥동전자기파에서 이웃한 두개의 맥동사이시간간격의 최소한계는 얼마이겠는가?

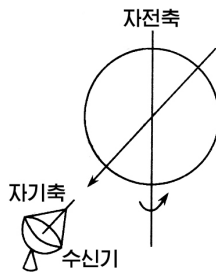



그림 9

7. 실험실계에 대해 상대적으로 정지된 직각자리표계 S 에서 한개

의 빛량자가 x축의 정방향을 따라 자리표계의 원점 O에 멎어있던 전자를 향하여 발사되였다. 빛량자와 전자가 충돌(호상작용)한 후 전자의 전에네르기는 정지에네르기의 1.1배였으며 y축방향에서 한개의 산란빛량자가 관측되였다. 전자의 정지질량은 m_0, 빛속도는 c이며 입사된 빛량자와 산란된 빛량자의 에네르기의 차가 전자의 정지에네르기의 1/10이라는것을 알고있다.

1) 충돌직후 전자의 운동속도 v, 속도 v와 x축사이의 각 θ, 전자가 원점으로부터 리탈된 거리가 L_0(이 값은 아는것으로 보아라.)일 때 원점 O로부터 마지막 도달점 A까지 운동하는데 걸리는 시간 Δt를 구하여라.

2) 전자가 우의 1)에서 구한 속도 v로 운동하기 시작하는 순간 관찰자가 전자에 고정된 자리표계 S'에서 관찰할 때 S'계에서 측정한 OA의 길이를 구하여라.

8. 그림 10에 보여준바와 같이 수평으로 놓인 책상면우에 긴 나무판자 C가 놓여있다. C의 오른쪽 끝에는 제지판 P가 고정되여있고 왼쪽끝과 가운데부분에는 작은 물체 A와 B를 올려놓았다. A와 B의 크기 및 P의 두께는 무시할수 있다. A와 B, B와 P사이의 거리는 L이다. 책상면과 나무판자 C사이의 마찰은 무시할수 있으며 A와 C사이, B와 C사이의 최대정지마찰곁수와 미끄럼마찰곁수는 모두 μ이다. A, B, C(제지판 P를 포함하여)의 질량은 모두 같다. 처음에 B와 C가 정지되여있는 상태에서 A를 어떤 처음속도로 오른쪽으로 운동시킨다. 이때 아래에 지적하여준 경우들이 발생할수 있겠는가? 발생한다면 그때 A의 처음속도 v_0이 만족시켜야 할 조건을 정량적으로 구하고 발생할수 없다면 그 리유를 정성적으로 설명하여라.

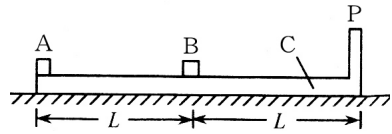



그림 10

1) 물체 A와 B가 충돌한다.
2) 물체 A와 B가 충돌(튐성충돌)한 후 B가 p와 충돌한다.
3) B가 P와 충돌(튐성충돌)한 후 C우에서 B와 A가 또다시 충돌한다.
4) A가 C에서 떨어지게 된다.
5) B가 C에서 떨어지게 된다.

올림픽경연모의문제 Ⅲ

1. 수직으로 설치된 두 평행금속판 A, B가 있다. 그들사이의 거리는 d, 이 두 판사이에 걸린 전압은 U이다. ＋로 대전된 질점이 M점으로부터 처음속도 v_0으로 수직웃방향으로 움직이기 시작하였다. 이 질점이 N점에 도착했을 때 속도의 크기는 역시 v_0이였지만 방향은 수평방향으로 변화되였다.(그림 11) M점과 N점사이의 전위차를 구하여라.(여기서 대전된 질점에 의한 극판에서의 전하재분포는 무시하여라.)

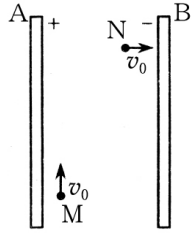



그림 11

2. 질량이 M인 작은 밀차가 v_0의 속도로 수평방향궤도를 따라 (마찰은 없다.) 등속직선운동하고있다. 이제 질량이 m인 작은 물체를 처음속도없이 이 밀차의 왼쪽에 올려놓았다. 이 작은 물체와 밀차사이의 미끄럼마찰결수는 μ이다.

1) 이 물체가 밀차에서 미끄러져 떨어지지 않자면 밀차의 길이가 최소한 얼마로 되여야 하는가?

2) 우의 조건이 만족될 때 물체가 멎을 때까지 마찰력이 수행한 일은 얼마인가?

3. 그림 12에 보여준 장치에서 아래우에 설치한 용기와 그것들을 련결하고있는 가는 관은 비열이 매우 작으며(무시할수 있다.) 열전도가 대단히 좋은 재질로 만들어졌다. 관의 길이는 l, K는 변이다. 전체 장치는 외부계와 단열되여있다. 처음에 변 K는 닫겨있고 두 용기들에는 질량이 m, 비열이 c인 어떤 액체가 담겨있다. 그리고 온도가 T_0인 평형상태에 놓여있다. 그런데 이 액체의 증기분자들이 중력의 작용을 받고있으므로 이 기체들에서의 압력분포는

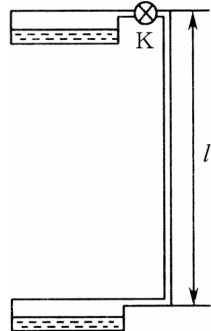



그림 12

$$P_h = p_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}$$

로 된다. 여기서 h는 아래에 있는 용기속의 액면으로부터 관

속의 임의의 위치까지의 높이, P_h 는 이 위치에서의 압력, P_0 은 아래용기의 액면우 $(h=0)$ 에서 기체의 압력, m 은 기체분자 한개의 질량, T 는 기체의 온도, k 는 볼쯔만상수이다. 이제 변 K를 열어놓으면 이 계의 상태가 어떻게 변화되겠는가? 계의 최종온도 T 를 대략적으로 타산하여보아라.

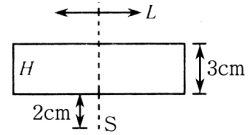
4. 수평상태로 놓여있는 유리판 H의 두께는 3cm, 굴절률은 $n=1.5$이다.(그림 13) 유리판의 아래면으로부터 2cm 밑에 작은 물체 S가 있고 유리판우에는 얇은 볼록렌즈 L이 있다. 렌즈의 빛축은 유리면에 수직이며 물체 S가 빛축에 놓인다. 관찰자가 볼록렌즈의 웃쪽에서 빛축아래방향으로 본 물체 S의 영상이 다름아닌 S위치에 그대로 있다면 렌즈와 유리판 웃면사이의 거리는 얼마인가?

L
H
3cm
2cm
S

그림 13

5. 우주비행선과 소행성이 태양주위를 돌고있는데 같은 평면우에서 원운동하고있다. 우주비행선의 질량은 소행성의 질량에 비해 대단히 작으며 그의 원운동속도는 v_0 이고 소행성의 궤도반경은 우주비행선의 궤도반경의 6배이다. 어떤 사람이 우주비행선과 소행성의 충돌을 리용하여 우주비행선을 태양계에서 벗어나게 하려고 시도하면서 다음과 같은 방안을 제기하였다.

첫째로, 우주비행선이 자기 운동궤도우의 적당한 위치에 도달했을 때 거기에 설치된 분사발동기를 시동시키고 매우 짧은 시간이 지난 다음 꺼버린다. 이렇게 하여 비행선이 필요한 속도를 얻게 하고 원래의 원궤도의 접선방향을 따라 원궤도를 리탈하게 한다.

둘째로, 우주비행선이 소행성의 궤도에 들어서는 순간에 바로 소행성의 앞에 나타나도록 하되 이 위치에서 소행성과 우주비행선의 고도방향이 같도록 함으로써 소행성과 우주비행선을 충돌시킨다.

셋째로, 소행성과 우주비행선의 충돌을 튐성충돌로 되게 한다. 그러면 태양계를 리탈하는데서 연료를 상당히 절약하게 된다.

1) 이러한 방법으로 우주비행선을 태양계로부터 리탈시킬수 있는가를 계산을 통하여 증명하여보아라.

2) 앞에서 제기된 방안에서 발동기를 시동시켜 우주비행선이 얻게 된 운동에네르기를 E_1 라고 하자. 만일 앞에서 제기한 소행성과의 충돌방안을 리용하지 않고 비행선이 자기 궤도에 있을 때 급격히 로케트발동기를 시동시켰다가 짧은 시간이내에 발동기를 꺼버리는 방법으로 이러한 속도를 얻음으로써 이 비행선이 자기 궤도에서 리탈되여 직접 태양계를 탈출하게 할 때 발동기로부터 얻은 운동에네르기 E_2 의 비를 구하여라.

6. 1995년에 어느 한 나라의 과학자들이 테바트론(TEVATRON)이라는 장치를 리용하여 양성자와 반양성자를 충돌시키는 실험과정에 T쿼크(Top Quark-소립자의 한 종류)를 발견하였는데 그의 정지질량은 $m_t = 1.75\times10^{11}\text{eV/C}^2 = 3.1\times10^{-25}\text{kg}$, 수명은 $\tau = 0.4\times10^{-24}\text{s}$ 였다.

1) 정 및 반T쿼크사이의 강한 호상작용포텐샬은

$$E(r) = -k\frac{4a_s}{3r}$$

로 표시된다. 여기서 r 는 두 쿼크립자사이의 거리, $a_s = 0.12$ 로서 강한 호상작용결합결수, k 는 단위계설정과 관계되는 결수로서 국제단위계에서는 $k = 0.319\times10^{-25}\,\text{J}\cdot\text{m}$ 이다. 이 두개의 소립자가 하나의 속박상태의 계를 이룰수도 있지 않겠는가 하는 착상으로부터 다음과 같은 가정이 제기되였다. 즉 정 T쿼크와 반 T쿼크가 그들사이의 끌힘의 작용을 받으면서 그들사이를 련결하는 선의 중심주위로 등속원운동하는 형식으로 서로 결합되는 속박상태를 이룰수 있다는것이다. 이러한 결합상태가 실현된다는것을 전제로 하고 보아의 원자구조리론을 리용하여 바닥상태에서 정, 반 T쿼크사이의 거리 r_0 을 구하여라. 속박상태에서 정, 반 T쿼크립자들이 다음과 같은 량자화조건을 만족한다는것을 이미 알고있다고 하자. 즉 $2mv\left(\frac{r_0}{2}\right) = n\cdot\frac{h}{2\pi}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$

여기서 $mv\left(\frac{r_0}{2}\right)$ 은 한개 립자의 운동량과 그의 자리길반경 $\frac{r_0}{2}$ 의 승적이며 n 은 량자수, $h=6.63\times10^{-34}$J·s(플랑크상수)이다.

2) 우에서 고찰한바닥상태에서 정, 반T쿼크들의 등속원운동주기 T 를 구하여라. 그리고 정, 반T쿼크들에 의한 이러한 속박상태가 존재할수 있다고 인정할수 있는가?

7. 네데를란드의 수학자였던 씨얼핀스키는 1916년에 다음과 같은 흥미있는 기하도형을 생각해냈다.(그림 14)

먼저 그림 ㄱ와 같은 검은 색의 바른3각형에서 세변의 중간점 D, E, F들을 련결하고 가운데 생긴 거꾸로 선 작은 3각형 DEF를 떼낸다. 그러면 그림 ㄴ와 같은 도형이 얻어진다. 그다음 남아있는 세개의 바른3각형들에 우와 같은 조작을 하면 그림 ㄷ와 같은 도형이 생긴다. 그림 ㄷ에 우와 같은 조작을 다시 하면 그림 ㄹ와 같은 도형이 생긴다. 이러한 도형들은 자체닮음성을 띠게 되는데 이러한 기하학적도형을 씨얼핀스키바킹이라고도 부른다. 여기서 자체닮음성이라는 의미는 다음과 같다. 도형에서 임의의 한개 요소(례하면 그림 ㄹ에서 △BJK)를 택하고 그를 확대하면 그림 ㄴ와 꼭같은 도형이 된다. 만약 앞에서 설명한 분할조작을 끝없이 반복해나가면 씨얼핀스키바킹의 검은색부분들은 계속 뚫려나가게 될것이다. 수학자들은 이

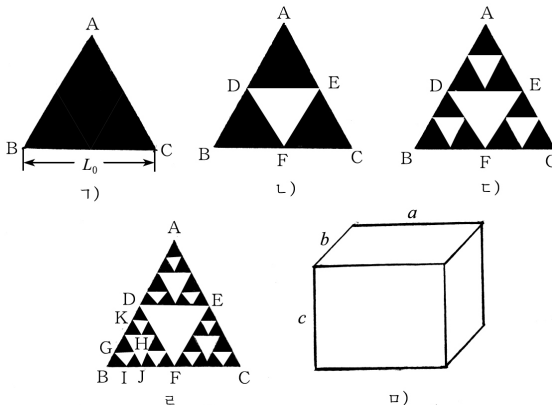



그림 14

러한 기하학적도형들에서의 자체닮음성에 대하여 구체적으로 연구분석한데 기초하여 새로운 학문분야를 창조하였는데 이것을 《프락탈기하학》이라고 부른다. 최근 30여년어간에 물리학자들은 프락탈기하학의 연구성과와 방법들을 이와 관련이 있는 물리학부문들에 적용하여 적지 않은 성과들을 거두었다. 여기서는 이러한 내용을 담고있는 한가지 문제를 제시한다. 그림 ㄱ에서 바른3각형 ABC 의 한 변의 길이를 L_0 이라고 하고 이 3각형의 한 변이 전기저항 r 에 대응된다고 하자. 그러면 그림 ㄴ에서는 그 값이 $r/2$인 저항 3개가 3각형련결된것으로 된다. 그림 ㄷ에서는 그림 ㄴ에서와 같은 저항들의 3개조가 또다시 3각형련결된것으로 되며 이때 작은 3각형의 한 변에는 저항 $r/4$에 대응된다. 그림 ㄷ에서는 작은 검은 3각형의 변 하나가 $r/8$인 저항에 대응된다.

1) 3차분할이 진행된 후(즉 그림 ㄹ) 3각형 ABC의 임의의 두 정점사이의 등가저항은 얼마인가?
2) 꼭같은 분할방식으로 n 차분할한 후 3각형 ABC의 임의의 두 정점사이의 등가저항은 얼마인가?
3) 우의 문제 2)를 풀어보면 알겠지만 바른 3각형에서 길이가 L_0 인 변 하나가 저항 r 에 대응된다고 할 때 분할의 차수가 많아질수록 분할 후의 3각형의 변의 길이는 보다 작아지지만 등가저항을 구할 때 개입되는 3각형련결된 저항의 개수는 더 많아질뿐만아니라 분할 후 3각형 ABC의 임의의 두 정점사이의 등가저항값자체가 분할된 작은 3각형의 변의 길이에 따라 달라진다.

《프락탈기하학》의 견지에서 이문제를 론의하기 위하여 먼저 2단저항회로에서의 《지수》개념에 대하여 설명하겠다. 길이, 너비, 높이가 각각 a, b, c 인 직4각형도체가 있다고 하자.(그림 ㅁ) 전류가 수평방향으로 흐르는 경우에 이 흐름방향에 수직인 량끝면들사이의 저항(2단저항)값은 $R=\rho\frac{a}{b\cdot c}$ 로 된다. 우의 식에서 ρ 는 도체의 비저항이다. 만일 b, c 는 고정되여있고 a 변만이 변하는 경우에 이 길이를 L 로 표시하면 도체의 저항은 L에 비례한다. 즉

$$R_{(1)}(L)=\rho\frac{a}{b\cdot c}\sim L^1$$

이 식에서 지수 1을 1차전도체의 지수라고 부른다. 다음으로 c만이 고정되고 a와 b의 길이는 같으면서 변하는 경우 길이를 L로 표시하면 $a=b=L$이므로 이러한 2차원도체의 저항은 길이 L에 무관계하며 $R_{(0)}(L)=\rho\frac{1}{c}\sim L^0$, 이때 0은 2차원도체의 지수라고 부른다. 이상의 내용을 확장하여 일반화한다면 2단저항회로에서의 등가저항과 변화되는 공간길이 L 사이에는 $R_{(s)}(L)=kL^s$ 관계가 성립될것이다. 여기서 k는 L이나 S에 무관계한 상수이다. 여기서 S를 2단저항회로의 지수라고 부른다. 씨얼핀스키바킹에서 볼수 있는바와 같이 분할하지 않은 3각형의 한 변의 길이는 L_0이며 여러차례의 분할을 거치면 매개의 작은 3각형의 길이가 분할회수에 따라 변화된다. 이 길이를 L이라고 하겠다. 씨얼핀스키바킹에서 n차분할을 진행한 다음 A와 B점사이의 등가저항과 우에서 설명한 작은 3각형의 한 변의 길이(가변량) L사이의 관계를 구하고 그에 대응하는 지수를 계산하여라.

올림픽경연모의문제 Ⅳ

1. 그림 15에서와 같이 길이가 R인 막대기 OA가 O점을 지나는 수평축주위로 그림면내에서 회전할수 있게 설치되여있다. 이 막대기의 끝 A는 고정되여있는 도르래 B, C를 거치는 끈(늘어나지 않는다고 보라.)에 고정되여있고 끈의 다른쪽 끝에는 물체 M이 매달려있다. 도르래들의 반경은 무시할수있고 OB길이는 H이다. M이 운동하는 어떤 순간에 BA와 OB사이의 각이 α, 막대기의 각속도는 ω이다. 이 순간에 물체 M의 이동속도 v_M을 구하여라.

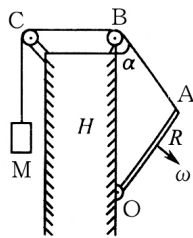



그림 15

2. 길이가 100cm보다 긴 균일한 줄을 수평으로 팽팽히 늘이고 량끝을 고정하였다. 그리고 오른쪽 고정점으로부터 25cm 되는 위치(여기에 자리표원점 O를 택한다. 그림 16의 ㄱ)에서 줄에 수직인 방향(y축방향)으로 줄을 당기되(요동을 준다.) 시간에 따르는 변위 y는 그림 16의 ㄴ와 같다.

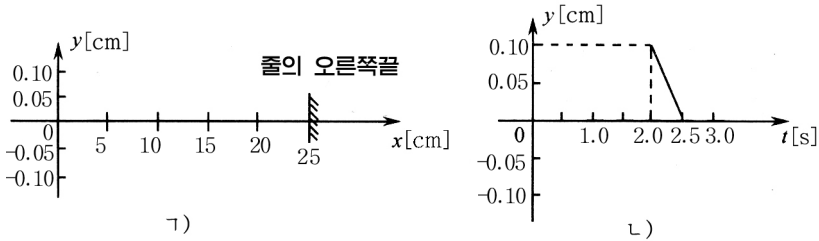



그림 16

이 요동은 줄을 따라 전파되면서 파동을 만든다.(고립된 맥동파이다.) 이때 파동의 전파속도는 2.5cm/s이며 파동이 전파 및 반사될 때 에네르기의 손실은 없다.

1) 줄을 따라 O점으로부터 오른쪽으로 전파되는 파동의 $t=$ 2.5s때의 모양을 정확히 그리여라.

2) 이 파동이 오른쪽 고정점에 이르면 반사되면서 왼쪽으로 전파된다. 그러나 반사점은 언제나 고정되여있다. 따라서 이 과정을 오른쪽과 왼쪽으로 전파되는 두 파동이 중첩되는것으로 볼수 있다. 그리고 반사점의 변위는 항상 령이다. 이런 관점에서부터 판단하여 12.5s일 때 파동의 모양을 그림 ㄱ에 정확히 그리여라.

3) $t=10.5$s인 순간의 파동모양을 그림 ㄱ에 정확히 그리여라.

3. 두개의 단열용기 A와 B를 변을 통하여 련결하였다. 이때 용기 B의 체적은 A에 비하여 대단히 크다. 처음에 변은 닫겨있고 두 용기에 같은 종류의 리상기체가 들어있는데 온도는 30℃이고 B에서의 압력이 A에서의 압력의 2배이다. 이제 변을 천천히 열고 압력이 같아진 다음 변을 막는다. 이때 용기 A에서 기체의 온도는 몇℃인가? 변을 열고 닫는 기간에 A와 B속의 기체들사이에 열교환은 없다고 본다. 그리고 이 기체 1mol의 내부에네르기는 $U=\frac{5}{2}RT$이다. 여기서 R는 기체상수, T는 절대온도이다.

4. 질량이 200kg, 높이가 2m이고 밑면이 얇은 금속통을 호수밑바닥에 거꾸로 가라앉혔다.(그림 17) 금속통의 가로자름면적은 0.5m^2, 금속체적은 $2.5\times10^{-2}\text{m}^3$, 통속에는 높이가 0.2m인 공기가 들어있으며 호수의 깊이는 20m, 대기압 P_0

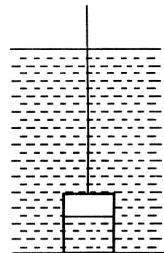



그림 17

은 10m의 물기둥이 내려누르는 압력과 같고 물의 밀도 $\rho=1\times10^3\ \mathrm{kg/m^3}$, 중력가속도 $g=10\mathrm{m/s^2}$이다. 쇠바줄로 끌어올리는 과정에는 통의 밑면이 물면에까지 올라오게 쇠바줄을 당기는 힘이 수행하는 일이 최소값으로 되는 때가 있게 된다. 쇠바줄을 당기기 시작하여 물면까지 끌어올리는 과정에 금속통과 물(호수의 물과 통속의 물을 포함하여)에서의 력학적에네르기의변화량 ΔE는 얼마인가?(3자리수까지의 유효수자를 구하여라.) 물의 저항은 무시하고 물의 온도는 일정한것으로 보며 포화증기압의 영향은 고려하지 말라.

5. 대단히 많은 작은 차량들을 련결하여 제트코스타를 만들었다. 이 렬차가 수평궤도를 따라 일정한 속도로 달리다가 원형회전궤도에 들어선다.(그림 18) 제트코스타의 길이가 L, 회전궤도의 반경이 R (R는 차량한개의 길이에 비해 대단히 크지만 $L>2\pi R$ 이다.)라고 하자. 수평궤도에서 제트코스타의 속도가 최소한 얼마로 되여야 차량들이 회전궤도를 원만히 통과할수 있겠는가?

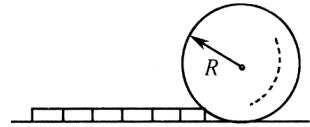



그림 18

6. 그림 19의 ㄱ에 보여준것처럼 바른4각형도선틀 $A_1A_2A_3A_4$구역안에 그림면을 수직으로 뚫고들어가는 방향으로 고른 자기마당 B가 걸려있다. 이 자기마당 B는 시간에 비례하여 커진다. 도선틀로 흐르는 유도전류는 $I=1\mathrm{mA}$이다. 도선틀에서 A_1A_2 변과 A_3A_4변의 저항은 $R_2=7\mathrm{k\Omega}$이다.

1) A_1, A_2점들사이의 전압 U_{12}, A_2, A_3점들사이의 전압U_{23}, A_3, A_4점들사이의 전압 U_{34}, A_4, A_1점들사이의 전압 U_{41}을 각각 구하여라.

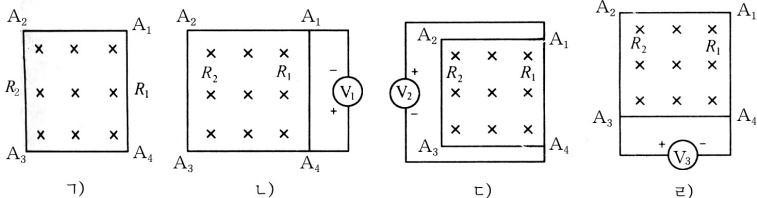



그림 19

2) 내부저항이 매우 큰 전압계를 그림 19의 ㄴ, ㄷ, ㄹ처럼 련결했을 때 각각 측정되는 전압 U_1, U_2, U_3을 구하여라.

7. 그림 20에 보여준것처럼 굴절률이 n ($n > n_0$), 여기서 n_0 은 진공의 굴절률)이고 반경이 r 인 균일한 작은 구가 진공속에 놓여있다. 진동수가 ν 인 레이자빛이 진공속에서 직선 BC를 따라 전파된다. 직선 BC와 작은 구의 중심 O사이의 거리는 $l(l<r)$ 이다. 이 빛은 구걸면의 C점에서 굴절되여 CD를 통과한 후 D점에서 다시 굴절되여 DE를 따라 진공속으로 전파된다. 이 과정에 레이자빛의 진동수가 변하지 않는다고 보고 이 두번에 걸치는 굴절과정에 레이자빛속에 있는 빛량자(포톤) 한개가 작은 구에 주는 힘의 평균값을 구하여라.

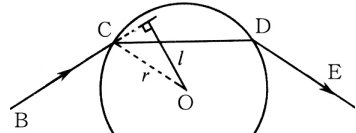



그림 20

8. 늘어나지 않는 가늘고 가벼운 끈에 질량이 m 인 작은 구(질점)가 꿰여져있는데 이 끈의 한끝은 A점에 고정되여있고 다른 끝은 질량을 무시할수 있는 작은 고리에 고정되여있다. 이 고리는 수평방향으로 고정된 가는 막대기에 꿰여있으면서 마찰없이 수평방향으로 미끄러질수 있게 되여있다. 이 막대기와 점 A는 수직평면상에 놓여있다. (그림 21의 ㄱ)

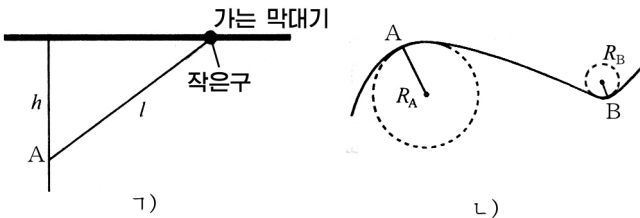



그림 21

작은 구는 끈을 따라 마찰없이 미끄러져내려올수 있다. 처음에 구는 고리와 접촉되여있고 끈은 팽팽히 당겨져있는데(그림은 처음상태를 보여준것이다.) 끈의 길이는 l, A점으로부터 가는 막대기까지의 거리는 h, 끈이 끊어지지 않고 견딜수 있는 최대 장력은 T_d 이다. 이제 구가 끈을 따라 미끄러져내려오다가 가능한 가장 낮은 위치에 이르기 전에 끈이 끊어진다면 이때 구의 위치와 속도의 크기를 구하여라.

참고: 질점이 평면내에서 곡선운동을 할 때 임의의 위치에서 이 질점이 가지는 가속도의 이 곡선에 대한 법선성분을 법선가속도라고 정의한다.

이 법선가속도 a_n 의 크기가 $a_n = v^2 / R$ 임을 증명할수 있다.여기서 v 는 고찰위치에서 질점이 가지고있는 속도의 크기, R 는 궤도곡선의 《곡률반경》이다. 그림 21의 ㄴ에서 준 평면곡선인 경우 A점에서의 곡률반경은 R_A, B점에서의 곡률반경은 R_B 이다.

올림픽경연모의문제 V

1. 반경이 $R=1$m인 미끈한(마찰이 없는) 수평 원탁면이 있는데 그 중심점 O부근에 수직 기둥을 세웠다. 이 기둥과 원탁면의 사귐선은 볼록하면서 원활한 닫긴곡선 C를 이루고있다.(그림 22) 가늘고 늘어나지 않는 부드러운 끈의 한 끝을 이 곡선우의 한 점에 고정시키고 다른 끝에는 질량이 $m = 7.5\times10^{-2}$kg인 작은 물체를 매달았다. 이 물체를 원탁면우에 놓고 끈을 팽팽하게 한 후 끈에 수직인 방향으로 물체에 처음속도 $v_0 = 4$m/s를 준다. 물체가 원탁면우에서 운동할 때 이 수직기둥에 감긴다. 그런데 끈에 걸린 장력이 $T_0 = 2$N 되면 끈이 끊어진다. 끈이 끊어지지 않는 한 물체는 원탁면우에서 계속 운동한다.

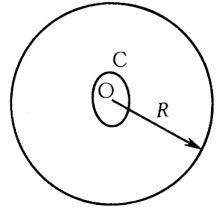



그림 22

1) 끈이 끊어지는 순간 끈에서 팽팽히 당겨진 부분의 길이는 얼마인가?

2) 끈이 끊어지는 순간에 끈에서 팽팽히 당겨진 부분이 원탁의 중심, O와 닫긴곡선 C우에서 끈의 접촉점을 련결한 선과 수직으로 되게 되였다고 하자. 이때 물체가 떨어진 점과 원탁중심 O사이의 수평거리는 얼마인가? 원탁면의 높이는 $H = 0.8$m이다. 원탁면우에서 운동할 때 물체는 수직기둥과 부딪치지 않으며 중력가속도는 10m/s^{2}으로 보아라.

2. 그림 23에서와 같이 수직방향으로 설치된 두 개의 금속도선(궤도)이 $l=1$m 거리를 두고 평

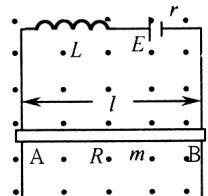



그림 23

행으로 서있고 여기에 유도선륜 L와 직류전원 $E(\varepsilon, r)$가 직렬로 련결되여있다. 수평방향으로 향하는 금속막대기 AB가 이 우에 놓이면서 전체적으로 닫긴회로를 이루고있다. 이 회로면을 뚫고나오는 방향으로 고른 자기마당 $B=0.4\text{T}$가 걸려있다. 처음에 금속막대기는 정지상태에 있으며 전원의 전동력은 $\mathscr{E}=9\text{V}$, 전원의 내부저항은 $r=0.5\Omega$, 금속막대기의 질량은 $m=1\text{kg}$, 막대기의 저항은 $R=1.1\Omega$, 유도권선의 자체유도결수는 $L=12\text{mL}$이다. 금속막대기가 락하하는 최대속도를 구하여라.(중력가속도 $g=10\text{m/s}^2$으로 보아라.)

3. 1mol의 리상기체가 $T-V$ 선도에서 표시되는 1→2→3 순환과정을 거치고 있다.(그림 24) 여기서 1→2과정의 방정식은 $T=2T_1(1-\frac{1}{2}\beta V)\beta V$, 2→3 과정은 원점을 통과하는 직선우의 일부, 3→1 과정의 방정식은 $T=T_1\beta^2V^2$이다. 여기서 β는 상수이다. 상태 1과 2에서 기체의 온도는 각각 T_1, $\frac{3}{4}T_1$이다. 한 순환과정에 기체가 외부계에 수행한 일을 구하여라.

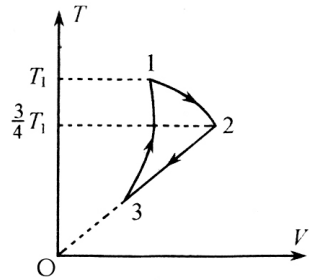



그림 24

4. 볼록렌즈의 빛축 OO′, 광원 A점의 위치, 렌즈에 의해 생기는 A의 영상 A′ 점의 위치, 서로 수직으로 배치된 평면거울 M_1와 M_2의 크기, 위치들이 그림 25와 같이 주어졌다.

1) 문제에서 준 그림우에 작도법으로 렌즈의 위치와 크기, 초점위치를 그리여라. 렌즈의 직경 $2R$는 알고있다고 하자.

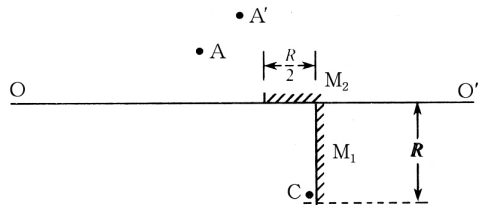



그림 25

2) 그림에서 C점에 작은 물체(점으로 볼수 있는 물체)가 이 광

학계에 몇개의 실영상과 몇개의 허영상을 만들겠는가? 그 위치들을 모두 표시하여라.

3) 문제에서 제시한 그림우에 C점의 실상이 형성되는 빛행로를 그리여라.

5. 직4각형의 도선틀 abcd가 수직방향으로 놓여있다.(그림 26) 이때 변 ab, dc는 수평방향으로 배치되여있는데 그 길이는 l_1 이고 변 ad, bc는 수직방향으로 배치되였는데 그 길이는 l_2 이며 도선틀전체의 질량은 m, 저항은 R 이다. 이 도선틀의 밑부분에 그림에서 보여준것처럼

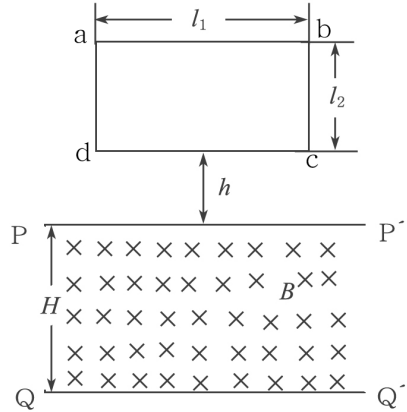



그림 26

고른 자기마당 B 가 걸려있다. 여기서 PP' 와 QQ' 는 ab와 평행이며 PP' 와 QQ' 사이의 거리는 $H(H>L_2)$, B의 방향은 그림면을 뚫고들어가는 방향이다. 이제 dc변이 자기마당구역웃경계 PP' 로부터 h 만큼 떨어진 위치로부터 도선틀을 자유락하시킨다. 이 과정에 dc변은 자기마당구역안에 들어오고 ab변은 아직 이 구역밖에 있게 되는 어떤 순간에 도선틀의 속도가 최대값에 이르게 된다면 변 dc가 PP' 를 넘어서는 순간으로부터 QQ' 에 도착할 때까지 도선틀에 작용하는 자기힘이 수행하는 일은 얼마인가?

6. 지구결면으로부터 화성을 향하여 화성탐측기를 발사한다. 지구와 화성이 같은 평면우에서 태양주위로 원운동하고있다고 가정하자. 이때 화성의 궤도반경 R_m 은 지구의 궤도반경 R_0 의 1.5배이다. 조작을 간단히 하면서도 소비에네르기를 절약하기 위해 다음과 같은 두 단계로 발사를 진행한다.

첫 단계: 지구결면에서 로케트에 탐측기를 싣고 그것을 가속시킨다. 속도가 충분히 커지면 이것이 지구의 끌힘을 극복하고

지구공전궤도를 따라 도는 인공행성으로 된다.
둘째 단계: 탐측기를 적재한 로케트의 발동기를 필요한 순간에 시동시켜 짧은 시간동안에 탐측기를 그가 운동하던 방향으로 가속시킨다.
이 가속과정은 지구공전궤도에 외접하면서 동시에 화성공전궤도에 내접하는 타원궤도를 따라 탐측기가 운동할수 있는 적당한 속도를 주자는데 그 목적이 있다. 이렇게 하면 탐측기를 화성에 보낼수 있다.(그림 27의 ㄱ)

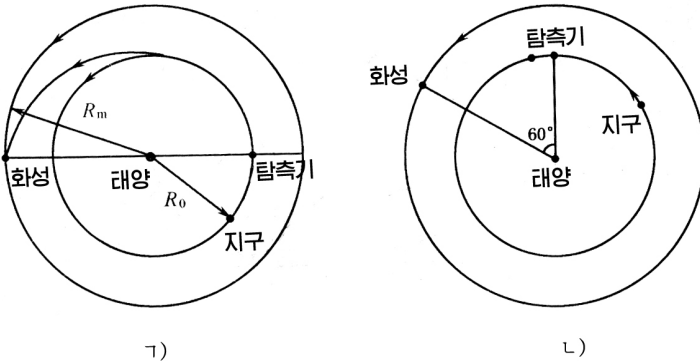



그림 27

1) 탐측기를 지구궤도를 따라 도는 인공행성으로 만들기 위해 지구겉면근방에서 가속시킬 때 얻어야 할 속도의 크기는 얼마인가?(지구에대한 상대속도)
2) 탐측기가 지구의 궤도우에서 안정하게 운동하고있던 어느 해 3월 1일 10 h 에 탐측기와 화성사이의 각거리가 60°로 되였다.(그림 27의 ㄴ) 몇년 몇월 몇일에 탐측기를 발사하면 그것이 화성겉면에 정확히 가닿게 되겠는가?(날자까지만 정확하게 구하여라.) 지구의 반경 $R_{지} = 6.4\times10^6$m, 중력가속도 $g = 9.8\text{m/s}^2$이다.

7. 체적이 같으면서도 구모양인 세개의 단열용기 A, B, C가 변 K_1, K_2이 달린 단열관들로 그림 28에서와 같이 련결되여있다. 여기서 이웃

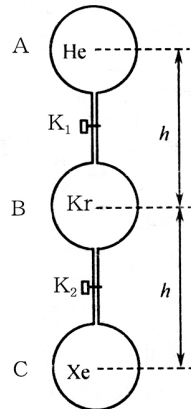



그림 28

한 두 용기의 중심들사이의 높이차는 $h=1\text{m}$이다. 처음에 변들이 닫겨있는 상태에서 A속에 1mol의 He, B속에 1mol의 Kr, C속에 1mol의 Xe이 들어있었는데 이 기체들의 온도와 압력은 다 같으며 리상기체로 볼수 있다. 이제 변 K_1, K_2을 열어놓아 세가지 종류의 기체를 충분히 혼합하면 매개 종류의 기체들이 세 통에 다 균일하게 분포되며 세개의 통에서 기체들의 온도도 다 같아진다. 기체에서 온도의 변화량을 구하여라. (마지막온도와 처음온도의 차) 매개 기체의 몰질량은 다음과 같다. $\mu_{\text{He}}=4.003\times10^{-3}\text{kg/mol}$, $\mu_{\text{Kr}}=83.8\times10^{-3}\text{kg/mol}$, $\mu_{\text{Xe}}=131.3\times10^{-3}\text{kg/mol}$

8. 400여년전에 25살의 대학교수였던 갈릴레이가 물체의 자유락하실험을 통하여《자유락하법칙》 $H=\frac{1}{2}gt^2$을 발견하였으며 이와 동시에 가속도의 개념을 도입하고 자유락하하는 물체에서 속도와 가속도사이에 $v=gt$의 관계가 있음을 밝혔다. 이 두 식을 결합하면 $mgH=\frac{1}{2}mgt^2=\frac{1}{2}mv^2$ 즉 $E_p=E_K$라는 결론을 얻어낼수 있다. 그 후에 과학자들은 이 결론으로부터 출발하여 중력포텐샬 E_P와 운동에네르기 E_K 사이의 전환법칙을 얻어냈다. 그런데 40여년전에 어떤 한 과학자는 아인슈타인의 견해에 기초하여 빛량자를 《떨어지는 물체》로 리용하면서 탑우에서 빛량자를 수직아래로 《발사》하는 실험을 진행하였는데 이를 통하여 중력마당속에서 운동하는 빛도 우와 꼭같은 법칙을 만족한다는 사실을 발견하였다.

1) 빛량자의 질량이 $m=\frac{E_k}{c^2}=\frac{h\nu}{c^2}$임이 알려져있다. 높이가 H인 탑우에서 주파수가 ν_0인 보임빛선대역의 빛량자를 수직아래로 발사한 경우 이 빛량자가 탑밑부분바닥에 도착할 때의 주파수 ν를 구하여라. 이 과정에 빛량자의 색갈이 붉은색쪽으로 변하겠는가, 보라색쪽으로 변하겠는가?

2) 우에서와는 반대로 빛량자를 탑의 밑바닥으로부터 탑꼭대기로 발사한 경우 주파수 ν를 구하여라.

3) 만일 질량이 M, 반경이 R인 어떤 천체겉면에서 수직웃방향으로 주파수가 ν_0인 빛량자가 발사한 경우 이 빛량자가 천체로부터 무한히 먼 곳에 도착할 때의 주파수 ν_0을 구하여라.

참고: 무한히 먼 곳을 포텐샬에네르기가 0인 기준점으로 잡으면 질량이 m인 질점이 천체겉면에서 가지게 되는 만유인력포텐샬에네르기는 $E_p = -\frac{GMm}{R}$으로 된다.

4) $Z = \frac{\lambda_\infty - \lambda_0}{\lambda_0}$를 천체와 빛량자사이의 《만유인력붉은색변위》라고 정의한다. 여기서 λ_∞와 λ_0은 주파수 ν_∞와 ν_0에 대응하는 진공속에서의 파장이다. 천체의 질량과 반경의 비 (M/R)와 만유인력붉은색변위 Z 사이의 관계를 정확히 밝히여라.

5) 태양의 만유인력붉은색변위가 $Z_0 = 3\times10^{-6}$이며 반경은 R_0이다. 씨리우스별과 함께 도는 2중별(흰색잔별이다.)의 만유인력붉은색변위는 $Z = 3\times10^{-4}$이며 반경은 $R = 0.0073R_0$이다. 이 별의 밀도는 태양의 밀도의 몇배인가?(유효수자 한자리수까지 구하여라.)

답 편

제1장. 운 동 학

1. 3)

풀이방향. 물체가 직선운동을 할 때 평균속도는 전체 자리옮김과 소비한 총시간의 비이다. 그러므로 문제에서 설정한 조건에서는 두 경우의 평균속도가 다르다.

2. 2) 3)

풀이방향. 그림 1-1은 거리와 시간사이의 관계그라프로서 질점의 운동이 직선운동이며 곡선운동이 아니라는것을 보여준다. 그런데 그림에서 ㄱ의 운동은 도중에 꺾어 올아오는 운동이며 ㄴ와 ㄷ의 운동은 계속 마감점으로 향하는 운동이다.

3. 1) 2) 3)

풀이방향. 립자들이 S에서 방출되여 N통까지 운동한 시간동안에 통이 돌아간 각 φ와 대응하는 회전수 n은 각각

$$\varphi_1 = \omega \frac{R}{v_1} = 2\pi n_1, \quad \varphi_2 = \omega \frac{R}{v_2} = 2\pi n_2$$

이다. 우의 두 식으로부터 다음과 같다는것을 알수 있다.

(1) n_1와 n_2은 모두 옹근수이고 n_1와 n_2의 차도 옹근수인 때 두 립자는 모두 b점에 떨어진다.

(2) n_1와 n_2이 모두 옹근수가 아니고 n_1와 n_2의 차가 옹근수일 때 두 립자는 모두 b점에 떨어진다.

(3) n_1와 n_2이 모두 옹근수가 아니고 n_1와 n_2의 차도 옹근수가 아니면 두 립자는 각각 b와 c점에 떨어진다.

4. $\frac{1}{3}$s

풀이방향. 드림선우로 던진 물체의 운동공식에 의해 작은 공들이 매번 공중에서 운동한 시간이 1s라는것을 쉽게 알수 있다. 그리하여 세 공이 공중에 함께 있을 때 공을 던지는 시간간격은 $\frac{1}{3}$s, 작은 공이 손에 머무르는 시간은 $\frac{1}{3}$s이다.

5. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ m/s

풀이방향. 바줄이 늘어나지 않는 특성이 있으므로 바줄에 의해 련결된 물체에서 바줄방향으로의 속도크기는 같다.

6. v_1=1.7m/s 혹은 v_2=2.9m/s

풀이방향. 작은 밀차가 왼쪽으로부터 N점으로 접근하는 경우와 오른쪽에서 N점으로부터 멀어져가는 경우의 두가지로 나누어 생각하자.(그림 2-1-1) Δt 시간동안에 빛이 돌아간 각도는

$$\Delta\varphi=\frac{\Delta t}{T}\times 360^\circ=15^\circ$$

이다. 그림에서처럼 두가지 경우가 있다.

그림 2-1-1

(1) 빛이 밀차우를 비칠 때 밀차는 왼쪽으로부터 N점으로 접근하며 Δt 시간동안에 빛과 MN사이의 각은 45° 로부터 30° 로 변하고 밀차는 L_1 만한 거리를 간다. 속도

$$v_1=\frac{L_1}{\Delta t}=\frac{d(\tan 45^\circ-\tan 30^\circ)}{\Delta t}=1.7\text{m/s}$$

(2) 반대로 밀차가 N점으로부터 멀어져갈 때

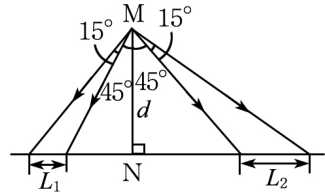
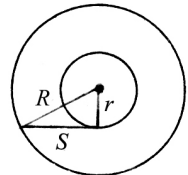
$$v_2=\frac{L_2}{\Delta t}=\frac{d(\tan 60^\circ-\tan 45^\circ)}{\Delta t}=2.9\text{m/s}$$

7. 우산은 등속원운동을 하며 비방울은 우산면의 변두리에서 선속도 $v=\omega r$ 로 떨어진 후 반경에 수직인 방향으로 수평으로 던진 운동을 한다.(그림 2-1-2) 이때 우에서 내려다보면 우산의 반경이 r이고 비방울이 땅에 떨어진 후 원둘레를 형성할 때 반경은 R이다. 비방울의 수평방향의 처음속도는 $v=\omega r$ 이고 던져진 높이와 수평거리는

그림 2-1-2

$$h=\frac{1}{2}gt^2,\quad S=vt$$

이므로 $$R=\sqrt{S^2+r^2}=r\sqrt{1+\frac{2h\omega^2}{g}}$$

8. $\dfrac{v_1 - v_2}{2R}$, $\dfrac{v_1 + v_2}{2}$

풀이방향. 원기둥체가 굴러가는 운동은 원기둥체의 평행이동과 O점을 중심으로 회전하는 운동의 합성으로 볼수 있다. 원기둥체는 오른쪽으로 등속병진운동을 하는데 속도를 v 라고 하고 O를 중심으로 시계바늘반대방향으로 등속회전운동을 할 때 각속도는 ω 라고 하자. 그러면 원기둥체의 제일 웃쪽에서 합성속도는 $v_1 = v + R\omega$, 제일 아래끝에서 $v_2 = v - R\omega$ 이며 이로부터 v 와 ω 를 이끌어낸다.

9. $\dfrac{c(a^2 + b^2)}{vab}$

풀이방향. 차를 기준계로 하자. 사람의 차에 대한 상대속도와 차속도의 반대방향과 이루는 각이 제일 작을 때 사람의 땅에 대한 속도가 제일 작다. 그리고 각도는 $\tan^{-1}(b/a)$ 이다.

10. 그림 2-1-3에서 a, b 가 함께 있다. A점에서 일어나기 시작한 파도가 B점에 도착할수 있다. (AB⊥BK) 함선이 A로부터 K로 이동하는 과정에 물흐름은 이 점을 C점까지 이끌어간다. 즉

$$\frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{BC}} = \frac{v_{함선}}{v_{물}}$$

그러므로 $v_{물} = v_{함선} \cdot \mathrm{BC/AK}$, 선분 AK와 BC의 길이를 측정하면 물흐름속도의 값을 구할수 있다.

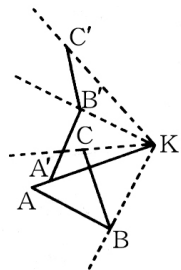



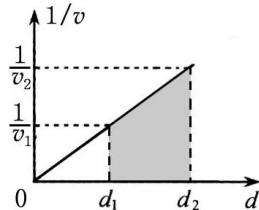
그림 2-1-3

$$v_{물} = 3\mathrm{m/s}$$

11. 문제로부터 알수 있는것처럼 쥐의 속도 v 와 쥐와 동굴사이의 거리 d 와의 승적은 상수이다. (그림 2-1-4)

그림 2-1-4

그러므로 $v_1 d_1 = v_2 d_2 = vd$, 즉

$$v_2 = \frac{v_1 d_1}{d_2}, \quad \frac{1}{d} = \frac{v}{v_1 d_1},$$

이로부터 $\dfrac{1}{v}$ 와 d 가 비례하며 이것은 $\dfrac{1}{v}$ 와, d, 그림에서 직선과 d 축에 의해 둘러싸여진 부분이 시간 t 라는것이다. 그림

에서 알수 있는것처럼 쥐가 ㄱ위치에서 ㄴ위치로 이동할 때 소비한 시간은

$$t=\frac{(d_2-d_1)\left(\frac{1}{v_2}+\frac{1}{v_1}\right)}{2}=\frac{(d_2-d_1)\left(\frac{d_2}{d_1 v_1}+\frac{1}{v_1}\right)}{2}=\frac{(d_2^2-d_1^2)}{2d_1 v_1}$$

12. 경사홈과 드림선방향사이의 각이 $\alpha/2$ 일 때 질점이 O점에서 경사면까지 미끄러지는데 드는 시간이 가장 짧다.

13. 포물선이 x 축방향으로는 등속운동(속도는 v_0 으로 한다.), y 축방향으로는 등가속운동(처음속도는 0, 가속도는 a 로 한다.)을 하는것으로 설계한다.(그림 2-1-5) $t=0$ 일 때 질점이 자리표원점에 있다고 보자. $t\geq 0$ 인 임의의 시각에 그림으로부터

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{v_0^2+a^2t^2}\ ,$$

$$a_{향}=a\cos\theta=\frac{av_0}{v},$$

$$R=\frac{v^2}{a_{향}}=\frac{(v_0^2+a^2t^2)^{3/2}}{av_0},\quad t=\frac{x}{v_0}$$

이로부터 $R=\dfrac{\left(1+\dfrac{a^2x^2}{v_0^4}\right)^{3/2}}{\dfrac{a}{v_0^2}}$

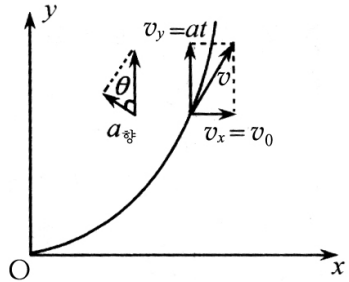



그림 2-1-5

여기서 $x\geq 0$, $x=v_0t$ 와 $y=\frac{1}{2}at^2$ 을 련립하면 운동자리길이

$$y=\frac{ax^2}{2v_0^2},\quad x\geq 0$$

운동자리길이 $y=Ax^2$ 의 $x\geq 0$ 인 부분이므로 $a/2v_0^2=A$ 가 성립한다. 이것을 R 의 식에 넣으면 $R=\dfrac{(1+4A^2x^2)^{3/2}}{2A}$, $x\geq 0$;

이 식은 포물선 $y=Ax^2$ 에서 $x\geq 0$ 일 때의 x 자리표에 따르는 곡률반경의 분포이다. 대칭성으로 하여 $x\leq 0$ 인 부분의 곡률반경의 분포도 역시 $x\geq 0$ 인 경우와 같다. 우의 식에서 x대신에 $-x$를 넣으면 곡률반경은 같아야 한다.

$$R = \frac{\left[1+4A^2(-x)^2\right]^{3/2}}{2A} = \frac{(1+4A^2x^2)^{3/2}}{2A}, \quad x \le 0$$

우의 식들을 종합하면 포물선 $y = Ax^2$ 의 곡률반경은 통일적으로

$$R = \frac{(1+4A^2x^2)^{3/2}}{2A}$$

로 표시할수 있다.

14. 1) 반원기둥체를 기준계로 하자.(그림 2-1-6)

이 기준계에서 P점은 원운동을 한다. 그림에서 v_1 는 땅에 대한 막대기의 상대속도, v_2 은 땅에 대한 반원기둥체의 상대속도, v_3 은 반원기둥체에 대한 막대기의 상대속도이다.(그림 ㄱ)

즉 v_3 의 방향은 원둘레의 P점에서 접선방향이고 v_1 의 방향은 드림선방향이다. v_1, v_2, v_3 사이의 관계는 그림과 같다. 여기로부터

ㄱ)

ㄴ)

그림 2-1-6

$v_1 = v_2 \tan\theta = v \tan\theta$

2) 반원기둥체를 기준계로 하면 P점의 가속도는 접선방향가속도 a_t 와 법선가속도 a_n 으로 이루어져있고 a_3, a_2, a_t, a_n 의 방향을 그림 ㄴ에 주었다. 여기서

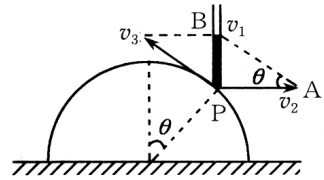
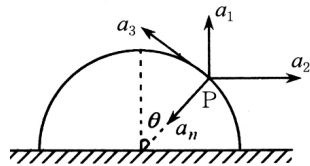
$$a_n = \frac{v_3^2}{R} = \frac{v^2}{R\cos^2\theta}$$

이고 상대운동에 대한 식으로부터 a_n 방향에서

$$a_3 \cos\theta = a_2 \sin\theta - a_n,$$

그러므로

$$a_3 = a_2 \tan\theta - \frac{v^2}{R\cos^3\theta}$$

15. 1) 물체 B의 웃자리길에서 운동은 끈방향의 운동과 끈에 수직인 운동(즉 바줄의 O점 주위의 회전운동)의 합성으로 볼수 있다.(그림 2-1-7) B의 끈방향에 따르는 운동의 성분속도는 $v_{B/\!/} = v$, 그러므로 바줄에 수직인 성분속도는

$v_{B\perp} = v\tan\theta$ (θ 는 BO와 자리길사이의 각이다.) 그림에서 보다싶이 끈중심에서 작은 물방울 P의 속도는 끈방향의 성분속도 $v_{P//}$ 와 끈에 수직인 방향의 성분속도 $v_{P\perp}$ 로 나눌수 있다. 즉 $v_{B//} = v$, $v_{B\perp} = v\tan\theta$, 작은 물방울 P의 끈에 수직인 방향의 성분속도는 끈의 O점주위의 회전으로 볼수 있다. 이 시각에 끈이 회전하는 각속도를 ω 라고 하면

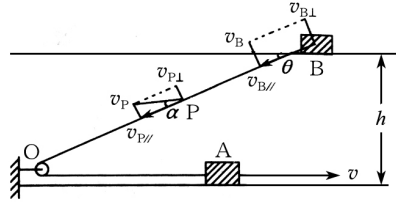



그림 2-1-7

$$\omega = \frac{v_{P\perp}}{BO/2} = \frac{v_{B\perp}}{BO}$$

이로부터

$$v_{P\perp} = \frac{v_{B\perp}}{2} = \frac{v\tan\theta}{2},$$

그러므로 $\tan\alpha = \frac{\tan\theta}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$, $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$,

α 는 v_P 와 $\overline{BO}$ 사이의 각이다. v_P 와 수평방향사이각은 $30^\circ - \alpha$, 물방울이 끈에서 떨어져나갈 때의 속도는

$$v_P = \sqrt{v_{P//}^2 + v_{P\perp}^2} = \sqrt{\frac{13}{2}}v$$

2) $\alpha < 30^\circ$ 로부터 물방울 P는 이 경사진 끈의 아래쪽으로 던져진 운동을 한다. P의 드림선방향의 분운동은 처음속도가 $v_{P_{y_0}}$ 이고 가속도가 g 인 등가속직선운동이며

$$v_{P_{y_0}} = v\sin\theta - v_{P\perp}\cos\theta = \frac{v}{4},$$

그러므로 $$\frac{h}{2} = \frac{1}{4}vt + \frac{1}{2}gt^2$$

이 방정식에서 t 를 구하면

$$t = \frac{1}{4g}\left(\sqrt{v^2 + 16gh} - v\right)$$

제2장. 운동법칙

1. 2) 3)

풀이방향. 물체가 경사면을 수직으로 내려누르는 힘 N, 경사면과 물체사이의 마찰력을 f 라고 하면 경사면에 수직인 방향으로는 $N - mg\cos\theta = ma\cos\theta$, 경사면에 평행인 방향으로는 $f - mg\sin\theta = ma\sin\theta$, 이로부터 2), 3)이 옳다

2. 2)

풀이방향. 나무토막이 등속원운동을 할 때 생기는 향심력은 마찰력때문에 생긴것이다. 그러므로 마찰력은 중심방향으로 향한다.

3. 2)

풀이방향. 철길과 류사하게 굽인돌이에서 승용차길의 바깥쪽이 높고 안쪽이 낮다. 승용차의 중력과 땅면을 수직으로 누르는 승용차의 맞선힘의 합력으로 향심력을 제공함으로써 마찰력을 줄인다. 마찰력이 령일 때 맞선힘의 수평성분힘이 향심력으로 된다.

4. $\dfrac{mg}{\cos\theta}$, $90°$

풀이방향. 처음에 평형일 때 용수철이 당기는 힘 $F = \dfrac{mg}{\cos\theta}$,

또한 mg 와의 합력은 수평오른쪽으로 향한다.(바줄을 수평으로 당기는 힘과 비긴다.) 줄을 끊는 순간 F , mg 의 크기, 방향은 모두 변하지 않는다. 합력의 크기와 방향도 변하지 않는다.

5. 나무토막을 대상으로 하자.

$$N = ma\,,\quad \mu_2 N = mg$$

질점들의 묶음을 대상으로 하자.

$$F - \mu_1(M+m)g = (M+m)a$$

이것을 풀면

$$F = 110\text{N}$$

6. 1) 그림 2-2-1과 같이 작은 구가 받는 풍력을 F 라고 하고 작은 구의 질량을 m 이라고 하자. $F = \mu mg$ 이므로

$$\mu = F/mg = 0.5mg/mg = 0.5$$

2) 작은 구에 대한 막대기의 맞선힘을 N, 마찰력을 f 라고 하자. 그러면 막대기방향으로 $F\cos\theta + mg\sin\theta - f = ma$, 막대기에 수직인 방향으로는 $N + F\sin\theta - mg\cos\theta = 0$, 또한 $f = \mu N$, 여기로부터

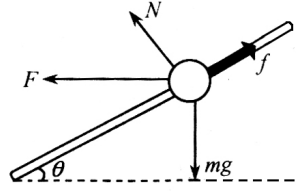



그림 2-2-1

$$a = \frac{F\cos\theta + mg\sin\theta - f}{m} = \left(g + \frac{F^2}{m^2 g}\right)\sin\theta = \frac{3}{4}g$$

$S = \frac{1}{2}at^2$ 이므로 $t = \sqrt{\frac{2S}{3g/4}} = \sqrt{\frac{8S}{3g}}$

7. 두 구가 서로 힘의 작용을 받을 때 그의 가속도는 각각 $a_A = f/m$, $a_B = f/2m$, 두 구의 속도가 같아질 때까지 지나간 시간이 t 로 된다면 $v_0 t - a_A t = a_B t$, 두 구가 부딪치지 않았을 때는 $v_0 t - \frac{1}{2}a_A t^2 = \frac{1}{2}a_B t^2 + l - 2r$

이것을 풀면 $v_0 = \sqrt{\frac{3F(l-2r)}{m}}$ 을 얻는다. 두 구가 부딪치지 않는다면 v_0 은 반드시 $v_0 < \sqrt{\frac{3F(l-2r)}{m}}$ 이여야 한다.

8. 적혈구가 혈장속에서 등속으로 가라앉을 때 받는 힘은 그림 2-2-2와 같다. F_1 는 혈장속에서 적혈구가 받는 뜰힘, F_2 은 적혈구의 중력, f 는 끈기저항력이다. 이 3개힘의 합력은 령이다.

$F_2 = F_1 + f$, $F_1 = \rho_1 Vg$, $F_2 = \rho_2 Vg$

$V = 4\pi R^3/3$, $f = 6\pi\eta v$, 수값을 넣어 계산하면

$R = 2.7\times10^{-6}$ m

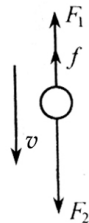



그림 2-2-2

9. 피대가 땅으로부터 떨어진 높이는 일정하다. 그러므로 물체가 수평방향으로 피대에서 떨어져나갈 때 속도가 제일 작으며 이때 물체의 중력이 향심력으로 된다는것을 고려하면

$$\frac{mv_{최소}^2}{r} = mg, \quad v_{최소} = \sqrt{gr} = 1\ \mathrm{m/s}$$

수평으로 던져져서 운동한 시간은

$$t=\sqrt{\frac{2H}{g}}=1\,\text{s}$$

물체와 피대사이의 미끄럼마찰력은 물체가 $a=\mu g=2\text{m/s}^2$ 의 가속도를 가지게 한다. 물체가 피대우에서 가속될수도 있고 감속될수 있다. 만일 감속운동을 한다면 물체가 피대우에서 가질수 있는 최소속도는

$$v_1=\sqrt{v_0^2-2al}=1\,\text{m/s}=v_{최소}$$

물체가 피대를 벗어난 후 반드시 수평으로 던져진 운동을 하게 되는데 물체가 피대우에서 가질수 있는 최대속도는

$$v_2=\sqrt{v_0^2+2al}=7\text{m/s}$$

즉 물체가 땅에 떨어져서 닿는 가장 작은 거리와 가장 큰 거리는 각각 $S_1=v_1t=1\,\text{m}$, $S_2=v_2t=7\text{m}$

피대의 속도 $v\le 1\,\text{m/s}$(이 식은 속도가 반대방향인 경우도 포함한다.)일 때 물체가 땅에 닿는 수평거리는 모두 1m이다. $v'\ge 7\ \text{m/s}$일 때 물체가 땅에 닿는 수평거리는 모두 7m이다. $1\text{m/s}<v'<7\text{m/s}$일 때 물체가 피대를 벗어날 때의 속도는 피대의 속도와 같다. 땅에 떨어진 수평거리 $S=v't$ 는 피대의 속도가 증가함에 따라 커진다. 우의 분석으로부터 그림 2-2-3과 같은 그라프를 얻을수 있다.

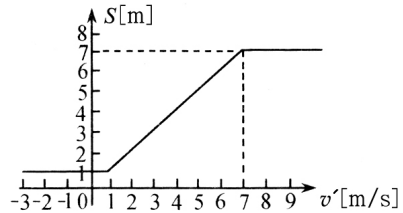



그림 2-2-3

10. 1) B는 두가지 힘을 받는다. 물체에 대한 바줄의 장력 F와 미끄럼마찰력 f, 장력을 접선과 법선방향으로 분해하고 F_t, F_n으로 그림 2-2-4에 표시했다. B는 O점 주위로 등속원운동을 한다. $F_n=m_B\omega^2R$, B의 속도크기는 변

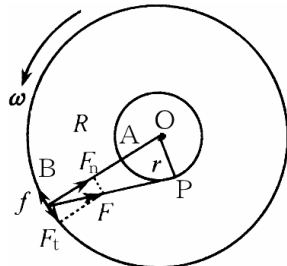



그림 2-2-4

하지 않는다. $f=F_t$이다. 그림에서 알수 있는것처럼 힘3각형은 기하3각형과 비슷하게 $\frac{F_t}{F_n}=\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PB}}$ $\frac{\mu m_B g}{m_\mathrm{B}\omega^2 R}=\frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}$

이것을 풀면

$$R=\frac{\mu g r}{\sqrt{(\mu g)^2-(\omega^2 r)^2}}$$

2) 앞의 분석으로부터 알수 있는것처럼 운동이 안정됐을 때 반드시 $\mu g>\omega^2 r$여야 하며 즉 $\omega<\sqrt{\frac{\mu g}{r}}$, $\omega>\sqrt{\frac{\mu g}{r}}$일 때 바줄이 A판에 감기게 되여 반경은 끊임없이 감소하게 된다.

11. A를 놓는 순간 끈의 장력을 T라고 하자. 이때 m_2은 드림선방향으로만 힘을 받는다. 그 가속도를 a라고 하면 $m_2g-T=m_2a$이다. 작은 고리 A에 대해서 드림선방향으로의 가속도는 a이다. 즉 고리에 대한 막대기의 맞선 힘을 N이라고 하면 축에 수직인 방향으로는 $N-(m_1g+T)\cos\alpha=0$ 이고 드림선방향으로는 $T+m_1g-N\cos\alpha=m_1a$ 이다. 여기로부터

$$T=\frac{m_1m_2g\cos^2\alpha}{m_1+m_2\sin^2\alpha}$$

12. 구 m_1은 O점에 고정된 끈 l_1의 속박을 받으므로 원운동을 한다. 이때 가속도는 드림선웃쪽으로 향하며 O점을 가리킨다. 크기는 $a_1=v_0^2/l_1$ 이다. 이때 땅면에 대한 구 m_2의 상대속도는 령이며 m_1와는 상대적으로 원운동을 한다. m_1에 상대적으로 m_2의 가속도는 드림선웃쪽으로 향하며 크기는 $a_{21}=v_0^2/l_2$ 이다. 땅에 대해서는 $a_2=a_1+a_{21}=v_0^2/l_1+v_0^2/l_2$ 이다. m_2에 대해서 보면

$$m_2a_2=T_2-m_2g\ \rightarrow\ T_2=m_2(g+a_2)=m_2\left(g+\frac{v_0^2}{l_1}+\frac{v_0^2}{l_2}\right)$$

13. 1) 두 나무토막 A와 B 전체를 연구대상으로 하자.(그림 2-2-5)

$$F-\mu(m_A+m_B)g=(m_A+m_B)a$$

수평방향으로는 $F-N\sin\theta-\mu N_\mathrm{A}m_\mathrm{A}$, 드림선방향으로는 $N_\mathrm{A}+\mu N\cos\theta-m_\mathrm{A}g=0$ 이다. F를 없애면 $N\sin\theta-\mu[(m_\mathrm{A}+m_\mathrm{B})g-N_\mathrm{A}]=m_\mathrm{B}a$ 이다. 문제의 조건《오른쪽으

로 가속하며 상대적운동은 없다.》를 고려하면 $a>0$, $N_A \geq 0$이다. 앞의 식으로부터

$$N \leq \frac{m_A g}{\cos\theta}$$

$$\mu < \frac{N\sin\theta}{(m_A+m_B)g - N_A} \leq \frac{N\sin\theta}{(m_A+m_B)g}$$

을 얻는다. 이로부터

그림 2-2-5

$$\mu < \frac{m_A \tan\theta}{m_A + m_B}$$

2) 앞의 운동방정식들을 련립하고 a와 N_A를 없애고 N와 F사이의 관계를 풀면

$$N = \frac{-m_B F}{(m_A+m_B)(\mu\cos\theta - \sin\theta)},\quad N \leq \frac{m_A g}{\cos\theta},\quad F \leq \frac{m_A g(m_A+m_B)(\tan\theta - \mu)}{m_B}$$

14. 물체 A가 아래방향으로 중력 mg를 받는다. 물체 A에 대한 B의 맞선힘을 N이라고 하자. 물체 B가 받는 힘은 그림 2-6과 같이 드림선아래방향으로의 중력 Mg와 드림선웃방향으로의 맞선힘 F이다. B를 누르는 A의 압력 N′, 는 경사면에 수직아래로 작용한다. 문제에서 주어진 자리표계에서 물체 A에 대해 x축방향과 y축방향으로 모두 가속도가 있으며 그것들은 각각 a_{1x}, a_{1y}이다. 뉴톤의 제2법칙으로부터 운동방정식을 유도하면 $-N\sin\theta = ma_{1x}$, $N\cos\theta - mg = ma_{1y}$ 이다. B에 대해서는 그것이 공중에 떠있거나 땅속에 들어갈수 없다는데로부터 가속도는 x축방향에만 있게 된다. 그것을 a_{2x}라고 하면 뉴톤의 2법칙으로부터 B의 운동방정식을 유도해낼수 있다. N의 크기가 N'의 크기와 같으므로 N'의 크기를 N으로 약속하면 $N\sin\theta = Ma_{2x}$, $N\cos\theta - Mg - F = 0$ 을 얻는다. m이 M우에서 아

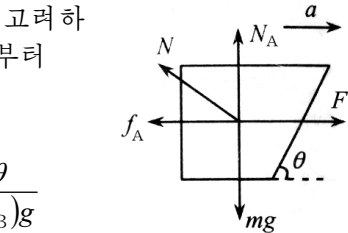
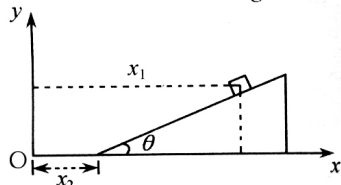
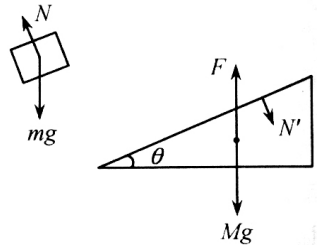



그림 2-2-6

래로 운동하므로 그것들사이 자리표와 자리표로부터 얻는 가속도사이에는 다음의 관계가 있다. 그림에서 보는것처럼 즉

$$\frac{y_1}{x_1 - x_2} = \tan\theta, \qquad \frac{a_{1y}}{x_{1x-}x_{2x}} = \tan\theta$$

우에서 서술한 5개의 식을 련립하여 풀면

$$a_{1x} = \frac{-M\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}g, \quad a_{1y} = -\frac{(M+m)\sin^2\theta}{M + m\sin^2\theta}g, \quad a_{2x} = \frac{m\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}g,$$

$$N = \frac{mM\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}g, \qquad F = \frac{M^2 + mM}{M + m\sin^2\theta}g$$

15. 3개의 물체가 외력 F의 작용하에서 상대적으로 정지되여있다고 하자. 계의 가속도는 a이다. 이때 $F = (M_1 + M_2 + M_3)a$

1) 먼저 $\mu_1 < \tan\theta$ 인 전제하에서 M_2 과 M_3 이 상대적으로 정지되여있을 때 M_1가 M_2에 상대적으로 아래로 미끄러질 가능성이 있다면 M_1가 운동할 때의 가속도를 론하자. 이때 물체가 만일 아래쪽으로 미끄러지지 않는다면 M_1가 받는 마찰력은 경사면을 따라 웃쪽으로 향한다. M_3을 기준계로 하면 다음의 식이 성립한다.

$$N_1 - M_1 g\cos\theta - M_1 a\sin\theta = 0 \qquad (1)$$

$$\mathrm{M}_1 g\sin\theta - \mathrm{M}_1 a\cos\theta - f_1 = 0 \qquad (2)$$

$$f_1 \le \mu_1 N_1 \qquad (3)$$

웃식의 식 3을 정리하여

$$a \ge \frac{\sin\theta - \mu_1\cos\theta}{\cos\theta + \mu_1\sin\theta}g \qquad (4)$$

를 얻는다.

이 상태에서 만일 M_1가 M_2에 대하여 상대적으로 웃쪽으로 미끄러지지 않는다면 이때 M_1가 받는 마찰력은 경사면아래쪽으로 향하고 M_3을 기준계로 할 때 우와 같은 분석에 의해

$$a(\cos\theta - \mu_1\sin\theta) \le (\sin\theta + \mu_1\cos\theta)g \qquad (*)$$

웃식에 대하여 $\cos\theta - \mu_1\sin\theta > 0$ 을 고려하면 즉 $\mu_1 < \cot\theta$ 일 때

$$a \le \frac{\sin\theta + \mu_1 \cos\theta}{\cos\theta - \mu_1 \sin\theta} g \qquad (5)$$

이 성립한다.

동시에 $\mu_1 < \tan\theta$ 와 $\mu_1 < \cot\theta$ 인 조건을 고려하고 $\theta < 45^{\circ}$ 일 때 $\tan\theta < \cot\theta$, $\theta > 45^{\circ}$ 일 때; $\tan\theta > \cot\theta$ 이라는것에 주의를 돌리면 $\mu_1 < \tan\theta$ 일 때 식 5가 성립하는 조건은 $\theta < 45^{\circ}$ 인 때는 식 5가 반드시 성립되고 $\theta \ge 45^{\circ}$ 인 때는 식 5가 $\mu_1 < \cot\theta$ 인 전제하에만 성립된다. $\mu_1 \ge \cot\theta$ 일 때 안갈기식 *는 항상 성립한다. 즉 계의 가속도가 어떤 값을 가지던간에 M_1가 M_2을 따라 웃쪽으로 미끄러지지는 않는다. 즉 보통상태에서 말하는《자체닫김》의 경우가 나타나는데 가속도가 취하는 값은 웃한계가 없다.

2) 이번에는 $\mu_1 \ge \tan\theta$ 의 전제하에서 M_2과 M_3이 상대적으로 정지되여있을 때 M_1가 M_2에 상대적으로 아래쪽으로 움직이는 경우가 있을수 없다는것을 론하자. 그러므로 M_1가 M_2에 대해서 웃쪽으로 운동하는 경우의 가속도를 보기로 하자. 이때 받는 마찰력은 경사면을 따라 아래로 향한다. 앞에서의 분석과 같이

$$a(\cos\theta - \mu_1 \sin\theta) \le (\sin\theta + \mu_1 \cos\theta) g \qquad (**)$$

를 얻는다.

같은 리치로 식 **을 볼 때 $\cos\theta - \mu_1 \sin\theta > 0$ 즉 $\mu_1 < \cos\theta$ 일 때

$$a \le \frac{\sin\theta + \mu_1 \cos\theta}{\cos\theta - \mu_1 \sin\theta} g \qquad (6)$$

이 된다.

$\cos\theta - \mu_1 \sin\theta \le 0$ 일 때 즉 $\mu_1 \ge \cot\theta$ 일 때 식 **이 항상 성립한다. 똑같이《자체닫김》현상이 나타난다. 가속도가 취하는 값은 웃한계가 없다. 동시에 우의 조건을 고려하고 $\theta < 45^{\circ}$ 일 때 $\tan\theta < \cot\theta$, $\theta > 45^{\circ}$ 일 때, $\tan;\theta > \cot\theta$ 인 조건에 주의를 돌리자. 그러면 $\theta < 45^{\circ}$ 일 때, $\tan\theta \le \mu_1 < \cot\theta$ 일 때 식 6이 성립하며 $\theta < 45^{\circ}$ 일 때 , $\mu_1 \ge \cot\theta$ 일 때《자체닫김》현상이 나타나며 a 는 저항을 받지 않는다.

$\theta \ge 45^\circ$ 일 때 $\mu_1 \ge \tan\theta$ 가 성립하면 반드시 $\mu_1 \ge \cot\theta$ 가 성립하므로《자체닫김》현상이 있고 가속도는 제한을 받지 않는다.

3) M_1와 M_2을 하나로 합하여 고찰하자. 이 두 물체가 M_3에 대해 상대적으로 미끄러지지 않는다면 계의 가속도는

$$a \le \mu_2 g \qquad (7)$$

마지막으로 식 7을 우에서 서술한 M_1가 M_2에 대해 상대적으로 멎어있는 경우와 결합하여보면

(1) $\mu_1 < \tan\theta$ 일 때

ㄱ) $\mu_2 \le \dfrac{\sin\theta - \mu_1\cos\theta}{\cos\theta + \mu_1\sin\theta}$ 일 때

a 는 풀이가 없다. 이것은 이 경우에 3개의 물체가 상대적으로 정지상태에 있을수 없다는것을 보여준다.

ㄴ) $\theta < 45^\circ$ 일 때

$\dfrac{\sin\theta - \mu_1\cos\theta}{\cos\theta + \mu_1\sin\theta} \le \mu_2 \le \dfrac{\sin\theta + \mu_1\cdot\cos\theta}{\cos\theta - \mu_1\cdot\sin\theta}$ 일 때

$$\frac{\sin\theta - \mu_1\cos\theta}{\cos\theta + \mu_1\sin\theta} g \le a \le \mu_2 g, \qquad F = (M_1 + M_2 + M_3)a$$

를 고려하면 장력 F는

$$(M_1 + M_2 + M_3)\frac{\sin\theta - \mu_1\cos\theta}{\cos\theta + \mu_1\sin\theta} g \le F \le \mu_2 (M_1 + M_2 + M_3) g$$

를 만족한다.

$\mu_2 \ge \dfrac{\sin\theta + \mu_1\cos\theta}{\cos\theta - \mu_1\sin\theta}$ 일 때

$$\frac{\sin\theta - \mu_1\cos\theta}{\cos\theta + \mu_1\sin\theta} g \le a \le \frac{\sin\theta + \mu_1\cos\theta}{\cos\theta - \mu_1\sin\theta} g$$

이때 장력 F는

$$(M_1 + M_2 + M_3)\frac{\sin\theta - \mu_1\cos\theta}{\cos\theta + \mu_1\sin\theta} g \le F \le (M_1 + M_2 + M_3)\frac{\sin\theta + \mu_1\cos\theta}{\cos\theta - \mu_1\sin\theta} g$$

을 만족한다.

ㄷ) $\theta \geq 45^\circ$, $\mu_1 < \cot\theta$ 일 때 앞의 론의들을 참고하면

$$\frac{\sin\theta - \mu_1\cos\theta}{\cos\theta + \mu_1\sin\theta} \leq \mu_2 \leq \frac{\sin\theta + \mu_1\cos\theta}{\cos\theta - \mu_1\sin\theta}$$ 일 때 장력 F는

$$(\mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2 + \mathrm{M}_3)\frac{\sin\theta - \mu_1\cos\theta}{\cos\theta + \mu_1\sin\theta}g \leq F \leq \mu_2(\mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2 + \mathrm{M}_3)g$$

를 만족한다

$\mu_2 \geq \dfrac{\sin\theta + \mu_1\cos\theta}{\cos\theta - \mu_1\sin\theta}$ 일 때

$\dfrac{\sin\theta - \mu_1\cos\theta}{\cos\theta + \mu_1\sin\theta}g \leq a \leq \dfrac{\sin\theta + \mu_1\cos\theta}{\cos\theta - \mu_1\sin\theta}g$ 가 성립한다.

이때 장력 F는

$$(\mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2 + \mathrm{M}_3)\frac{\sin\theta - \mu_1\cos\theta}{\cos\theta + \mu_1\sin\theta}g \leq F \leq (\mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2 + \mathrm{M}_3)\frac{\sin\theta + \mu_1\cos\theta}{\cos\theta - \mu_1\sin\theta}g$$

$\mu_1 \geq \cos\theta$ 일 때만

$$(\mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2 + \mathrm{M}_3)\frac{\sin\theta - \mu_1\cos\theta}{\cos\theta + \mu_1\sin\theta}g \leq F \leq \mu_2(\mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2 + \mathrm{M}_3)g$$

이 성립한다.

(2) $\mu_1 \geq \tan\theta$ 일 때

ㄱ) $\theta < 45^\circ$ 일 때 $\tan\theta \leq \mu_1 < \cot\theta$ 일 때

$\mu_2 \leq \dfrac{\sin\theta + \mu_1\cos\theta}{\cos\theta - \mu_1\sin\theta}$ 이면 $a \leq \mu_2 g$ 이 성립한다.

또한 $F \leq \mu_2(\mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2 + \mathrm{M}_3)g$ 도 성립한다.

만일 $\mu_2 \geq \dfrac{\sin\theta + \mu_1\cos\theta_1}{\cos\theta - \mu_1\sin\theta}$ 이라면 장력 F는

$$F \leq (\mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2 + \mathrm{M}_3)\frac{\sin\theta + \mu_1\cos\theta}{\cos\theta - \mu_1\sin\theta}g$$

를 만족한다.

$\mu_1 \geq \cot\theta$ 일 때 M_1에 대해서 본다면 가속도는 웃 한계를 가지지 않으며

$$F \leq \mu_2(\mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2 + \mathrm{M}_3)g$$

가 성립한다.

ㄴ) $\theta \geq 45^\circ$ 일 때 $\mu_1 \geq \tan\theta$ 가 성립한다면 $\mu_1 \geq \cot\theta$ 가

성립한다. 러면 《자체닫김》현상이 나타나며 가속도는 제한을 받지 않는다 이 식으로부터

$$F \le \mu_2(M_1 + M_2 + M_3)g$$

이 성립한다.

제3장. 일과 에네르기

1. 2)

풀이방향: 경사면에 작용하는 힘은 접촉면에 수직이나 그의 운동방향과는 수직이 아니므로 일을 한다.

2. 4)

풀이방향: 왼쪽 피스톤우에 있는 대기가 계에 대하여 정의 일을 하고 오른쪽 피스톤우에 잇는 대기는 계에 대해 부의 일을 하므로 계산하면 총일은 령이고 계의 자리에네르기는 감소하고 이 감소된 에네르기만큼 물의 내부에네르기가 증가한다.

3. $0.5\pi\rho L^2 v^3 \eta$

풀이방향: 풍력발전기의 매 날개의 길이가 L이므로 발전기의 바람맞이면적은 πL^2이고 공기가 운동하면서 수행한 일이 전기에네르기로 넘어간다는데 기초하여 결과를 얻을수 있다.

4. $\dfrac{m_2(m_1+m_2)g^2}{k_2}$, $\quad m_1(m_1+m_2)\left(\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}\right)g^2$

풀이방향: k_1, k_2은 처음부터 이미 압축되여있었다는것을 고려하여 아래용수철의 끌부분이 책상면에서 떨어져나가는 순간 k_1는 m_2에 의해 늘어난다. 두가지 경우 용수철의 모양변화에 기초하여 m_1, m_2의 자리변화를 판단할수 있고 나아가서 자리에네르기변화를 구할수 있다.

5. 1) 그림 2-3-1의 ㄱ에서 1과 2는 각기 나무토막이 물에 잠긴 시각과 물밑바닥에 닿았을때의 자리를 표시한다. 나무토막이 1에서 2까지 옮겨가면 이것은 똑같은 체적의 물이 2에서 1로 이동한것과 같이 볼수 있다. 호수의 자리에네르기의 변화량은 나무토막의 체적과 똑같은 물이 1과 2위치에

서의 에네르기차이다. 나무토막의 밀도가 물의 1/2이므로 나무토막의 질량을 m 이라고 하면 동일한 체적의 물의 질량은 $2m$ 이다. 따라서 호수의 자리에네르기변화량은

그림 2-3-1

$$\Delta E = 2mg\left(H - \frac{a}{2}\right) - 2mg\frac{a}{2} = 2mg(H-a)$$

이다.

2) 호수면적이 크므로 나무토막이 물에 들어간것으로 하여 생긴 물깊이 변화를 무시할수 있다. 나무토막이 완전히 물에 잠겼을 때 그림 ㄴ에서처럼 빗선친 부분의 물이 밀려나고 이것은 이 부분의 물이 수면에 골고루 퍼진것으로 볼수 있다. 이 부분의 물의 질량을 m이라고 하면 그 자리에네르기변화량은

$$\Delta E_{물} = mgH - mg\left(H - \frac{3}{4}a\right) = \frac{3}{4}mga$$

나무토막의 자리에네르기변화량은

$$\Delta E_{나} = mg\left(H - \frac{a}{2}\right) - mgH = -\frac{1}{2}mga$$

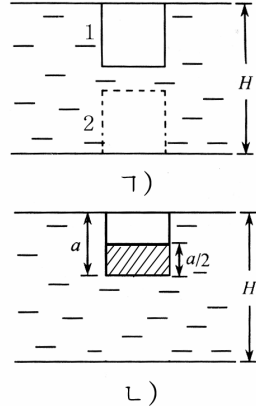
이때 힘 F가 수행한 일은 $W = \Delta E_{물} + \Delta E_{나} = \frac{1}{4}mga$ 이다.

6. 줄의 P쪽이 B점에 도달했을 때 왼쪽바줄과 수평땅면이 이루는 각은 θ 이다. 물체가 우물밑에서부터 우로 올라오는 높이는 h, 속도는 v, 구하려는 일을 W라고 하자. 그러면

$$W = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$$

바줄의 길이는 변하지 않으므로 $h = \frac{H}{\sin\theta} - H$

또한 $v = v_B \cos\theta$ 이므로 웃식으로부터

$$W = \frac{1}{2}mv_B^2\cos^2\theta + mg\left(\frac{1}{\sin\theta} - 1\right)H$$

$\theta = \pi/4$ 이므로

$$W = \frac{1}{2}mv_B^2 + mg(\sqrt{2}-1)H$$

7. 물체와 철판이 부딪칠 때의 속도 $v_0 = \sqrt{6gx_0}$, v_1 는 질량이 m인 물체가 철판과 부딪친 후 함께 아래쪽으로 운동하는 속도를 표시했다. 부딪치는 시간이 짧으므로 운동량보존법칙에 의해 $mv_0 = 2mv_1$ 이다. 부딪친 후 용수철의 튐성에네르기는 E_P 이고 그것들이 O점에 돌아왔을 때 용수철은 모양변화가 없고 튐성자리에네르기는 령이다. 문제에서 준 조건에 의하면 물체와 철판의 속도는 령이다. 력학적에네르기보존법칙에 의해

$$E_\mathrm{P} + \frac{1}{2}(2m)v_1^2 = 2mgx_0$$

v_2 은 질량이 $2m$인 물체가 철판과 부딪친 후 함께 아래쪽으로 운동하기 시작할 때의 속도로서 $2mv_0 = 3mv_2$

여전히 웃쪽으로 올라간다고 할 때 속도를 v 라고 하면

$$E'_\mathrm{P} + \frac{1}{2}(3m)v_0^2 = 3mgx_0 + \frac{1}{2}(3m)v^2$$

우의 두 경우에 용수철의 처음 압축량은 모두 x_0 이다. 그러므로 $E'_\mathrm{P} = E_\mathrm{P}$

질량이 $2m$인 물체가 철판과 함께 O점으로 되돌아올 때 용수철의 튐힘은 령이다. 물체와 철판은 오직 중력의 작용만을 받으며 가속도는 g이다. O점을 지난 다음 철판은 용수철의 아래방향으로의 장력을 받으며 가속도는 g보다 크다. 물체는 철판과 붙어있지 않으므로 물체는 철판의 장력을 받을수 없으며 가속도는 여전히 g 이다. O점에서 물체와 철판이 서로 분리된 후 물체는 속도 v 로 드림선웃쪽으로 운동하며 우의 식들을 풀어 물체가 우로 운동한 후에 도달하는 가장 높은 점과 O점과의 거리는

$$l = \frac{v^2}{2g} = \frac{1}{2}x_0$$

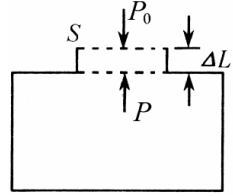
8. 작은 구멍의 면적을 S라고 하면 처음 작은 구멍밖의 얇은 층의 기체를 연구대상으로 삼고 얇은 층의 두께를 ΔL (그림 2-3-2에 표시)라고 하면 ΔL 이 아주 작으므로 그만 한 질량이 용기로 들어가는 과정에 용기안의 기체의 압력은 변하지 않으며 이 얇은 층이 받는 외부힘은 일정한 힘이고 크기는 $F = (P_0 - P)S$ 이다. 처

음에 용기에 들어온 Δm 인 기체에 대해 운동에네르기공식을 쓰면

그림 2-3-2

$$F\Delta L = \frac{1}{2}\Delta m v^2, \quad \Delta m = \rho S \Delta L$$

이고 이 식을 련립하여 처음에 용기에 들어온 공기의 속도를 구하면

$$v = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho}}$$

9. 1) 평형자리 O에 도달하기전에 물체 1과 2가 함께 가속운동을 한다. O점에 도달한 후 1은 감속운동을 하고 2는 등속운동을 한다. 그러므로 2와 1이 O점에서 분리되게 되므로 O점에 도달하기전에 1, 2 그리고 용수철을 한개의 계로 보면 이 계안에서 용수철만이 튐힘이 있으므로 일을 한다. 계의 력학적에네르기가 보존되므로 v 를 1과 2가 O점에 도달할 때의 속도라고 하면

$$\frac{1}{2}(m+m)v^2 = \frac{1}{2}kS_0^2$$

그러므로 $v = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}S_0$

이것이 서로 분리될 때의 물체 2의 속도이다.

2) 서로 분리된 후 다음번에 다시 만나기 전까지 1은 O점을 평형자리로 하여 조화진동을 하며 진동주기는

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

1과 2가 분리된 때부터 시간을 계산면 분리됐을 때를 $t=0$ 이라고 보고 1이 점을 통과하는 시간은

$$t_1 = \frac{T}{2}, T, \frac{3}{2}T, 2T, ... = n\frac{T}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

O점을 지난 다음 2는 등속도 v 로 오른쪽으로 직선운동을 하며 B와 충돌할 때 그것을 완전튐성충돌하므로 충돌한 후 2의 속도는 변하지 않는다. 이때 운동방향은 반대로 된다.

x가 B와 O점사이의 거리라고 하면 2가 O점으로 되돌아오는 시간은 $t_2 = \frac{2x}{v}$

2가 정확히 O점에서 1과 만나면 $t_1 = t_2$

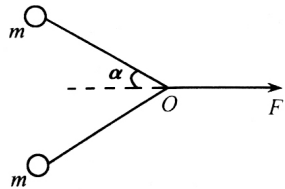
이로부터 x가 만족해야 할 조건은

$$x = n\frac{\sqrt{2}\pi}{4}S_0,\quad n = 1,\ 2,\ 3\ \cdots$$

10. 그림 2-3-3에서 보여주는것처럼 뉴톤의 제2법칙에 의하면 수평방향으로 일정한 힘 F가 작용할 때

$$a_x = \frac{F}{2m}$$

그림 2-3-3

일정할 힘 F가 작용점 O에 작용하기 시작해서부터 두 강철구가 충돌할 때까지의 자리옮김을 S라고 하고 힘 F의 방향을 x축방향으로 하자. F에 수직인 방향을 y축방향으로 잡으면 강철구가 x 축방향으로 이동한 거리는 $(S-L)$이다.

그러므로 강철구의 x축방향으로의 성분속도

$$v_x = \sqrt{2a_x(S-L)} = \sqrt{\frac{F(S-L)}{m}}$$

강철구들이 충돌하기 전에 힘에 수직인 방향의 속도를 v_y 라고 하면 운동에네르기보존법칙에 의해 이 두개의 강철구들로 이루어진 계에 대해서 $F_S = \frac{1}{2}(2m)(v_x^2 + v_y^2) = 0$

그러므로 $v_y = \sqrt{\frac{FL}{m}}$

11. 운동을 시작하여 Δt 시간동안에 끈이 이동한 거리는 Δl, 속도는 v라고 하자. Δt가 작으므로 $v^2 = 2a\Delta l$ 이다.

식에서 a는 처음에 끈의 매 점에서의 가속도이다. 력학적에네르기보존법칙에 의해

$$\frac{1}{2}Mv^2 = \Delta E_P$$

임을 알수 있다. 여기서 M은 끈의 전체 질량, ΔE_P는 Δt 시간 동안의 끈의 자리에네르기의 변화이다. 물론 ΔE_P가 끈질량의 재분포에 대응하므로 결과적으로 길이가 ΔL인 끈이 문제의 A 점에서 B점까지 옮겨간다. 이로부터

$$\Delta E_P = \left(\frac{M}{l}\right) gh\Delta l$$

우의 매 식으로부터 제일 처음에 끈의 운동가속도는

$$a = \frac{gh}{l}$$

12. 1) 위성의 만유인력에 의한 자리에네르기와 운동에네르기는 각각

$$E_P = \frac{GMm}{r_0}, \qquad E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

그 운동속도는 관계식

$$\frac{GMm}{r_0^2} = \frac{mv^2}{r_0}$$

이므로

$$E_k = \frac{GMm}{2r_0} = -\frac{1}{2}E_p$$

력학적에네르기

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}E_p = -E_k,\ E = -\frac{GMm}{2r_0}$$

2) 한바퀴 돈 후 력학적에네르기의 증가량은

$$\Delta E = -f(2\pi r), \quad E = -\frac{GMm}{2r_0^0}$$

이므로 E의 변화와 r의 변화는 서로 련관이 있으며

$$\Delta E = E(r+\Delta r) - E(r) = -\frac{GMm}{2(r+\Delta r)} - (-\frac{GMm}{2r}) = \frac{GMm\Delta r}{r(r+\Delta r)}$$

r의 변화량 Δr가 매우 작다는것을 고려하면

$$\Delta E = \frac{GMm\Delta r}{r^2}$$

이므로 위성이 한바퀴 돌 때 r의 변화량을 계산하면

$$\Delta r = -\frac{4\pi r^3 f}{GMm}$$

Δr는 부의 값을 나타낼 때가 감소한다는것을 의미한다.

$-E_K$로부터 $\Delta E_k = -\Delta E = 2\pi rf$ 를 얻는다. E_K가 정의 값을 가진다는것은 E_k 가 증가한다는것을 의미한다.

13. 운동선수가 중력 mg, 뜰힘 F, 물의 저항 f의 작용을 받는다. 그림 2-3-4와 같이 전체 과정에서 매 힘이 수행한 일은 다음과 같이 된다.

중력이 한 일 $W_C = mg(H+h)$

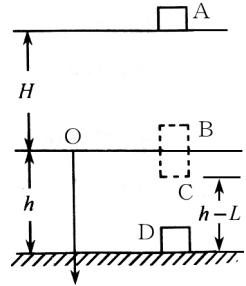
운동선수가 점 B에서 점 C까지 이동할 때 뜰힘이 고르롭게 증가하며 이때 뜰힘이 하는 일은

$$W_F = -\frac{\rho L\pi(d/2)^2 gL}{2} = -\frac{1}{8}\pi\rho g d^2 L^2$$

물의 저항이 하는 일은 문제의 그림 1-3-9에서처럼 곡선과 축으로 둘러막힌 《면적》으로 된다. 즉

$$W_f = -\frac{1}{4}\pi h\left(\frac{5}{2}mg_1\right) = -\frac{5}{8}\pi mgh$$

그림 2-3-4

전체 운동과정에 대해서 에네르기보존법칙을 적용하면

$$W_G = mg(H+h) - \frac{1}{8}\pi\rho g d^2 L^2 - \frac{1}{4}\pi\rho g d^2 L(h-L) - \frac{5}{8}\pi\, mgh = 0$$

을 얻는데 이것을 풀어서

$$h = \frac{mH + \frac{1}{8}\pi\rho L^2 d^2}{\frac{5}{8}\pi\, m + \frac{1}{4}\pi\rho L d^2 - m}$$

을 얻는다. 여기에 수값을 넣으면 h=4.9m를 얻는다.

14. 비행선 A, B의 질량을 모두 m으로 표기하자. 지구가 태양주위를 도는 속도를 v_0 이라고 하고 지구와 태양사이의 거리를 R, 태양의 질량을 M이라고 하자. 우주정류소와 지구의 상대속도를 무시했으므로 우주정류소의 태양에 대한 속도는

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

A가 태양계를 벗어나려면 력학적에네르기가 0이여야 한다. 우주선이 발사된 후 A속도가 v_0+v_{A} 라고 가정할 때

$$\frac{1}{2}m(v_0+v_{\mathrm{A}})^2-\frac{GMm}{R}=0$$

간단한 방법은 비행선이 우주정류소의 운동방향으로 발사되였다고 보면 발사되는 속도는 웃식의 v_{A} 이다. 이렇게 하면

$$v_0+v_{\mathrm{A}}=\sqrt{\frac{2GM}{R}}=\sqrt{2}\,v_0$$

즉

$$v_{\mathrm{A}}=(\sqrt{2}-1)v_0$$

B가 발사된 후 접선속도가 령으로 됐을 때만이 태양의 중심으로 떨어지게 되므로 간단히 하기 위해 반경방향의 속도를 령이라고 볼수 있다. B가 반대방향으로 발사될 때 발사되는 속도는

$$v_{\mathrm{B}}=v_0>v_{\mathrm{A}}$$

A와 B가 각각 속도 v_{A}, v_{B} 를 가지자면 발동기가 일을 해야 하며 일의 계산은 반드시 일정한 기준계에서 진행되여야 한다. 운동량보존 및 일과 에네르기사이관계를 써서 관성계에서 계산을 진행하자. 먼저 우주정류소가 A, B를 발사하기 전에 우주정류소와 v_0 의 속도로 함께 움직이는 관성계 S를 생각하면 R가 매우 크므로 그리 길지 않은 시간동안에 S를 관성계처럼 볼수 있다. 보통 우주정류소의 질량은 $M_0>>m$ 이다. 비행선이 발사된 후 M_0 의 질량변화는 이로부터 무시할수 있다. A가 발사되기를 전후하여 계의 운동량보존식은

$$mv_{\mathrm{A}}=mu$$

이다. 여기서 u는 A가 발사된 후 내뿜는 연소기체에 의하여 얻게 되는 관성계 S에 대한 우주정류소의 상대속도이다. 로케트가 한 일은

$$W_{\mathrm{A}}=\frac{1}{2}mv_{\mathrm{A}}^2+\frac{1}{2}M_0u^2$$

계산하면

$$W_A = \frac{1}{2}mv_A^2\left(1+\frac{m}{M_0}\right) \approx \frac{1}{2}Mv_A^2$$

똑같은 방법으로 관성계에서 비행선의 로케트가 한 일은

$$W_B = \frac{1}{2}Mv_B^2\left(1+\frac{m}{M_0}\right) \approx \frac{1}{2}mv_B^2$$

$v_B > v_A$ 이므로 $W_B > W_A$

발사시간이 같다는 조건에서 일능률의 크기관계는 $P_B > P_A$

즉 B가 A보다 일능률이 큰 로케트가 필요하다. 만일 태양계를 관성계로 잡으면 로케트 A가 수행한 일이 $\frac{1}{2}m(v_0+v_A)^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$이 아니라는데 주의를 돌려야 한다.

계에서 A를 발사하기 전후하여 운동량보존관계는

$$(M_0+m)\cdot v_0 = m(v_0+v_A)+M_0u'$$

그중에서 u'는 우주정류소의 태양에 대한 상대속도(마지막시각의)이다. 웃식으로부터

$$u' = v_0 - \left(\frac{m}{M_0}\right)\cdot v_A$$

로케트 A가 수행한 일은

$$W_A' = \frac{1}{2}m(v_0+v_A)^2 + \frac{1}{2}M_0u'^2 - \frac{1}{2}(M_0+m)v_0^2$$

이것을 정리하면

$$W_A' = \frac{1}{2}mv_A^2(1+\frac{m}{M}) \approx \frac{1}{2}mu_A^2$$

이로부터 알수 있는것처럼 $W_A^{'} = W_A$

같은 방법으로 로케트 A가 수행한 일은

$$W_B' = \frac{1}{2}mv_B^2(1+\frac{m}{M_0}) \approx \frac{1}{2}mv_B^2, \qquad W_B' = W_B$$

여기서 얻은 결론은 관성계 S에서 얻은 결론과 일치한다.

15. 웃쪽의 구를 구 1, 구중심을 O_1라고 하면 아래의 작은 구들을 차례로 구 2, 구 3, 구 4로, 이에 대응하는 구의 중심들을 O_2,

O_3, O_4라고 하자.

1) O_1, O_2, O_3, O_4를 련결하면 그림 2-3-5의 ㄱ와 같다.

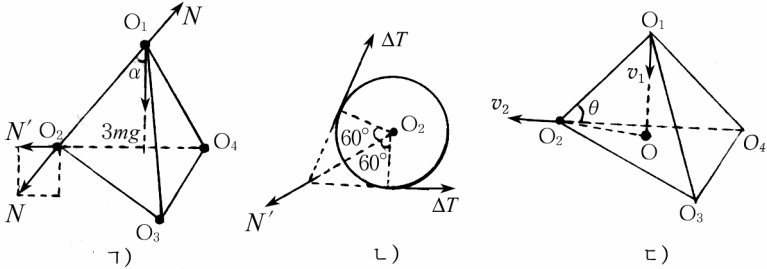



그림 2-3-5

매 구중심들사이 거리는 모두 $2R$이고 그림의 각 α에 대해서

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{6}}{3},\qquad \sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

이라는것을 알수 있다.

구 1이 아래쪽의 매개 작은 구들에 미치는 작용을 N이라고 하면 구 2, 3, 4가 구 1에 미치는 반작용의 합력은 $3mg$로 된다. 즉

$$3mg=3N\cos\alpha$$

이로부터

$$N=\frac{\sqrt{6}}{2}mg$$

구 2, 3, 4가 제각기 받는 힘의 수평방향의 분력은

$$N'=N\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}mg$$

그림에서 보여준것처럼 고무줄의 장력 T의 증분량 ΔT 는 N' 와 평형을 이루고있으므로 여기로부터

$$2\Delta T\cos 30^\circ=N'$$

$$\Delta T=\frac{\sqrt{6}}{6}mg$$

2) 고무줄이 끊어진 후 구 1이 아래로 운동하기 시작한다. 구 2, 3, 4는 구 1의 작용을 받으면서 수평운동을 한다. 구 1이 일정한 시간 운동한 후 구 2, 3, 4와 분리되는데 분리조건은 호상작용힘이 $N=0$이 되여야 한다. 구 1과 아래의 3개 구가 분

리된 후 중력의 작용하에서 등가속직선운동을 하게 된다. 계의 대칭성으로부터 구 2, 3, 4의 운동속도는 같고 속도의 방향은 $\Delta O_1O_2O_3$ 의 중심 O에서 각 정점 $O_j(i=1, 2, 3)$ 까지 련결하는 련결선의 방향이다. 그림에서 보여주는것처럼 O_1 의 아래방향속도를 v_1 라고 하고 O_2 의 OO_2 방향의 속도를 v_2이라고 하자.

직각 ΔO_1O_2O 의 $\angle O_1O_2O$ 를 θ 로 표시하면 θ 의 처음값 θ_0 은 $\sin\theta_0 = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ 을 만족한다. 시간이 지남에 따라 각 θ 는 감소한다. 각 θ 가 작아져서 어떤 값으로 됐다고 가정하면 구 1과 그밖의 3개 구사이의 호상작용 N은 령으로 되는데 이때 서로 분리된다고 본다. 이때 O_2 과 함께 운동하는 계를 관성계로 보면 O_2 에 대한 O_1 의 상대속도는

$$v = v_1\cos\theta + v_2\sin\theta$$

구 1과 구 2는 아직 분리되지 않았으므로 $v_1\cos\theta = v_2\sin\theta$ 를 만족한다. N=0일 조건으로부터 구 1이 구 2에 대해 상대적으로 운동할 때의 향심력은 구 1이 받는 중력의 분력으로 된다. 즉

$$3m\frac{(v_1\cos\theta + v_2\sin\theta)^2}{2R} = 3mg\sin\theta$$

웃식과 련립하면 $v_1^2 = 2Rg\sin\theta\cos^2\theta, \quad v_2^2 = 2Rg\sin^3\theta$

이때 구 1이 내려가는 속도는 $2R(\sin\theta_0 - \sin\theta)$ 이다. 력학적에네르기보존법칙에 의해

$$\frac{1}{2}(3m)v_1^2 + 3(\frac{1}{2}mv_2^2) = (3m)g2R(\sin\theta_0 - \sin\theta)$$

여기에 v_1^2, v_2^2 의 식을 넣으면 $\sin\theta = \dfrac{2\sqrt{6}}{9}$ 을 얻는다. 이것을 v_1^2 식에 넣으면 $v_1^2 = \dfrac{76\sqrt{6}}{243}Rg$

구 1이 아래의 3개 구와 분리된 후 자유락하운동을 한다. 구 1이 책상면과 마주칠 때의 속도 v 와 처음속도 v_1 사이

의 관계는 $v^2 = v_1^2 + 2gh$ 이다.

여기서 h 는 자유락하거리이며 $h = 2R\sin\theta$ 이다.

그리고 구 1이 책상면에 부딪칠 때의 속도는

$$v = \frac{\sqrt{876\sqrt{6}}}{27} \times \sqrt{\mathrm{Rg}}$$

제4장. 힘덩이와 운동량

1. $\sqrt{4g[\mu_A(L-l) + \mu_B l]}$

풀이방향: 두 나무토막 A, B 가 충돌하는 과정에 운동량 및 에네르기보존법칙이 만족되므로 A, B 가 충돌전과 후에 속도가 달라진다. 그 다음 일과 에네르기사이 관계를 써서 풀면 된다.

2. 1) $E = \frac{1}{2}mv^2 \quad \rightarrow \quad v = 8\times10^7\mathrm{m/s}$

2) $Ft = nmv$, $I = \frac{ne}{t} \quad \rightarrow \quad F = 9\times10^{-6}\mathrm{N}$

3. $Ft = mv$ 와 $P = F/S$ 로부터 $P = 1.1\times10^5\mathrm{Pa}$ 을 얻는다. 대략 대기압에 해당되므로 사람에게 해롭지 않다.

4. 1) 밀기와 잡기과정에 어린이와 썰매, 통의 전체 운동량은 보존된다. 충돌을 피하려면 통을 붙잡은 후 어린이 ㄱ와 ㄴ의 속도가 같아야 한다. 이로부터 밀 때의 최소속도를 구할수 있다. 통을 민 후 그 속도를 v 라고 하고 어린이 ㄱ의 속도를 v_1 라고 하면 운동량보존법칙으로부터 $mv + Mv_1 = (m+M)v_0$

어린이 ㄴ가 통을 잡은 후 속도가 v_2 이라고 하면 운동량보존법칙으로부터 $(m+M)v_2 = mv - Mv_0$

충돌하지 않을 조건은 $v_1 = v_2$

우의 세 식을 련립하면 $v = \frac{m^2 + 2mM + 2M^2}{m^2 + 2mM}v_0$

여기에 수값을 넣으면 $v = 5.2\mathrm{m/s}$

2) 밀 때 어린이 ㄱ가 통에 대해서 W의 일을 한다면 일과 에네

르기사이 관계로부터 $W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$

여기에 수값을 넣으면 $W = 1.7 \times 10^2$J

5. 1) 소형차가 x축의 정의 방향으로 운동하는 과정에 n−1번째 모래주머니가 차우에 던져진 후 차속도를 v_{n-1}이라고 하자. n번째 모래주머니가 차우에 떨어진 후 차속도를 v_n이라고 하면 운동량보존법칙에 의해

$$[M+(n-1)m]v_{n-1} - 2nmv_{n-1} = (M+mn)v_n$$

그러므로 $v_n = \frac{[M-(n+1)m]v_{n-1}}{M+mn}$

소형차가 반대방향으로 운동할 조건은

$$v_{n-1} > 0, \quad v_n < 0$$

즉 $M - nm > 0$과 $M-(n+1)m < 0$

수값을 넣으면 $n < M/m = 48/14$와 $n > (M/m) - 1 = 34/14$

또한 n은 옹근수가 되여야 하므로 이로부터 n=3, 즉 차우에 마대 3개가 쌓여진 후 차는 반대방향으로 미끄러진다.

2) 차가 반대방향으로 미끄러져 $x<0$인 쪽의 첫번째 사람이 위치한 곳까지 갔을 때 차속도가 변하지 않으며 차의 질량은 $M+3m$이다. 만일 x축의 부의 방향으로 가던 도중 (n−1)번째 모래주머니가 차우에 던져진 후 속도가 v'_{n-1}이고 n번째 모래주머니가 차우에 던져진 후 속도가 v'_n라고 하자. 이제 그림의 왼쪽방향(x축의 부의 방향)을 속도 v, v'_{n-1}의 정의 방향으로 정하면 운동량보존법칙으로부터 차가 왼쪽으로 다시는 미끄러지지 않을 조건은

$$[M+3m+(n-1)m']v'_{n-1} - 2nm'v'_{n-1} = (M+3m+nm')v'_n$$

즉 $v'_n = \{[M+3m-(n-1)m']v'_{n-1}\} \div (M+3m+nm')$

문제의 요구에 의하여 $v'_{n-1} > 0, \quad v'_n \le 0$

즉 $M+3m-nm' > 0$와 $M+3m-(n+1)\cdot m' \le 0$

혹은 $n < (M+3m)/m' = 9$와 $n \ge (M+3m)/m' - 1 = 8$

그러므로 $8 \le n < 9$

즉 n=8일 때 차는 미끄럼을 멈춘다. x<0인 쪽 8번째 모래주머니가 차에 떨어진 후 멈춰선다. 차안에는 모두 3+8

=11개

의 모래주머니가 떨어진다.

6. 평판차에 작용하는 수평방향의 힘을 F라고 하자.(그림 2-4-1) 물체와 차사이의 마찰력은 f_1, 차가 움직여서 물체가 차의 평판을 벗어날 때까지 경과한 시간을 t, 물체가 차평판을 벗어날 때의 속도를 v, 차의 속도를 v라고 하면 다음의 관계식이 성립된다.

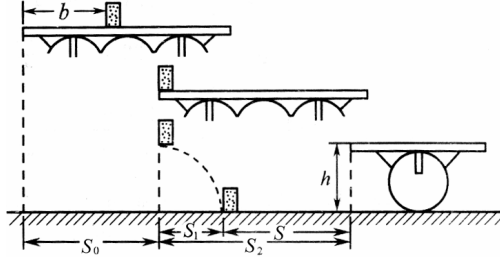



그림 2-4-1

$$(F-f)S_0=\frac{1}{2}Mv^2, \qquad f(S_0-b)=\frac{1}{2}mv^2,$$

$$(F-f)t=Mv, \qquad f\,t=mv, \quad f=\mu mg$$

이로부터 $\frac{F-f}{f}\cdot\frac{S_0}{S_0-b}=\frac{Mv^2}{mv^2}, \quad \frac{F-f}{f}=\frac{Mv}{mv}$

그러므로 $v=\sqrt{2\mu g(S_0-b)}=2\text{m/s}$

$$v=\frac{S_0 v}{S_0-b}=4\text{m/s}$$

그리하여 $F=f+\frac{Mv^2}{2S_0}=\mu mg+\frac{Mv^2}{2S_0}=500\text{N}$

물체가 차를 벗어난 후 수평으로 던져진 운동을 하며 그 수평속도는 v_0이다.

경과한 시간을 t_1, 지나간 수평거리를 S_1라고 하면

$$S_1=vt_1, \quad h=\frac{1}{2}gt_1^2$$

따라서 $t_1=\sqrt{\frac{2h}{g}}=0.5\text{s}$

그러므로 $S_1=2\times 0.5=1(\text{m})$

물체가 차를 벗어난 후 차의 가속도가 a라면

$$a = \frac{F}{M} = 5\mathrm{m/s}^2$$

차가 운동한 거리 $S_2 = vt_1 + \frac{1}{2}at_1^2 = 2.625\mathrm{m}$

유효수자를 두자리 취하면 $S_2 = 2.6\mathrm{m}$

따라서 $S = S_2 - S_1 = 2.6 - 1 = 1.6\mathrm{m}$

풀이과정의 S, S_0, S_1, S_2은 그림을 보아라.

7. 1) 나무토막 A가 B판으로부터 미끄러지지 않고 B_1판의 왼쪽 모서리로 미끄러져갔을 때 A와 B는 같은 속도를 가진다. 이 속도를 v라고 하고 A와 B의 처음속도를 v_0이라고 하면 운동량보존법칙에 의해 $Mv_0 - mv_0 = (M+m)v$

이것을 풀면 $v = \frac{M-m}{M+m}v_0$

v의 방향은 오른쪽으로 향한다.

2) A가 B판의 오른쪽 끝에 있을 때 처음속도는 왼쪽 방향이고 B판의 왼쪽 끝에 도달할 때의 마지막속도는 오른쪽을 향한다. 이로부터 A가 운동할 때 반드시 왼쪽 방향으로 감속운동을 하여 속도가 령이 되였다가 다시 오른쪽으로 가속운동을 하여 속도가 v로 되는 두 단계의 과정을 거치게 된다.

만일 l_1를 A가 왼쪽으로 운동하기 시작하여 속도가 령이 되는 과정에 지나간 거리라고 보고 l_2을 속도가 령으로부터 v로 증가하는 과정에 오른쪽 방향으로 운동하여 지나간 거리, L을 A가 운동하기 시작하여 B의 왼쪽 모서리에 도달한 순간까지 B가 운동한 거리라고 하고 그림 2-4-2에 표시를 하자.

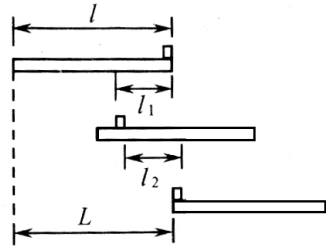



그림 2-4-2

A와 B사이의 마찰력을 f라고 할 때 일과 에네르기사이 관계로부터 B에 대해서

$$fL = \frac{1}{2}Mv_0^2 - \frac{1}{2}mv^2$$

A에 대해서는

$$f\,l_1=\frac{1}{2}mv_0^2,\qquad f\,l_2=\frac{1}{2}mv_0^2$$

기하학적관계로부터 $L+(l_1-l_2)=l$

우의 매 식들로부터 $l_1=\dfrac{M+m}{4M}l$

8. 프로펠라의 작용은 거의 정지되여있던 공기를 v_0 까지 가속시키는것이다. Δt 시간동안에 질량이 $\Delta m=\rho_0 S v_0 \Delta t$ 인 공기가 v_0 까지 가속된다.

공기의 운동량의 변화는 $\Delta P=(\Delta m)v_0=\rho_0 S v_0^2 \Delta t$

운동량보존법칙에 의해 프로펠라가 작용하는 힘덩이는 $\Delta I=\Delta P=\rho_0 S v_0^2 \Delta t$ 이다. 프로펠라가 공기에 주는 힘은

$$F=\frac{\Delta I}{\Delta t}=\rho_0 D v_0^2$$

공기가 프로펠라에 주는 반작용힘도 이 값을 가진다. 비행기가 공중에 떠있도록 하자면 $F=Mg$

$$v_0=\sqrt{\frac{Mg}{\rho_0 S}}=1.49\text{m/s}$$

가 되여야 하며 Δt 시간동안에 질량이 Δm 인 공기가 얻는 운동에네르기 $\Delta E_K=\dfrac{1}{2}\rho_0 S v_0^3 \Delta t$ 는 발동기가 수행한 일로부터 온다.

그러므로

$$N=\frac{\Delta E_k}{\Delta t}=\frac{1}{2}\rho_0 S v_0^3=5.95\times10^4\,\text{W}$$

9. 미끄러운 덩어리와 함통이 튐성충돌을 할 때 그것들의 질량이 같으므로 호상 속도를 교환하게 된다. 첫번째로 부딪쳤을 때 미끄러운 덩어리는 멎고 함통은 오른쪽으로 미끄러진다. 두번째로 부딪쳤을 때 함통은 멎고 덩어리는 오른쪽으로 미끄러진다. 그러나 이때 미끄러운 덩어리의 속도 v_1 는 v_0 보다 작다. 이로부터 알수 있는것처럼 함통이 거리 L만큼 옮겨갔을 때 두번째 충돌이 일어난다. 덩어리는 마찰이 없는 운동을 하므로 매번 덩어리는 멎어선다. 함통의 운동속도는 덩어리가 멎기 전에 가진 속도와 정확히 같다. 분석할 때 함통이 멈춰선 시간은 고려하지 않을수 있다. 또한 함통의 운동은 련속적인 감속운동

이다. 함통의 운동방정식은

$$\frac{m\Delta v}{\Delta t} = -\gamma v$$

이로부터 $m\Delta v = -\gamma v\Delta t = -\gamma\Delta S$ 이다.

즉 $mv_0 = \gamma S$ 이므로 미끄러운 덩어리와 함통의 충돌회수는

$$n = \frac{2S}{L} = \frac{2mv_0}{\gamma L}$$

10. 왕복운동을 하기 위해서는 작은 구와 뚜껑이 각기 충돌전이나 충돌후에나 속도가 서로 같아야 한다. 충돌할 때 구와 뚜껑의 속도를 각각 v_1, v_2 이라고 하면 아래의 식이 성립한다.

$$mv_1 - Mv_2 = -mv_1 + Mv_2,$$

$$v_2 = \frac{mv_1}{M}$$

또한 구가 바닥면에 도착하는데 필요한 시간을 t라고 하면

$$h = v_1 t + \frac{1}{2}gt^2$$

구가 완전히 되돌아오는데 걸린 시간은

$$t_1 = 2t = \frac{2(-v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2gh})}{g}$$

두껑이 제 자리에 되돌아오는데 걸린 시간은 $t_2 = \frac{2v_2}{g}$

t_1=t_2이므로

$$\frac{-v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2gh}}{g} = \frac{mv_1}{Mg} \quad \rightarrow \quad v_1 = M\sqrt{\frac{2gh}{m(m+2M)}}$$

11. 차가 l_0에서 정지되여있다가 O점까지 운동할 때 그 속도의 크기는 력학적에네르기보존법칙으로부터 $v = l_0\sqrt{\frac{k}{M}}$

식에서 k는 용수철의 튕성결수이다.

차에 물방울 n개가 떨어진 후 차가 O점에서 가지게 되는 속도는 운동량보존법칙으로부터

$$Mv = (M + nm)u$$

$$u=\frac{M}{M+nm}v=\frac{Ml_0}{M+nm}\sqrt{\frac{k}{M}}$$

또한

$$\frac{1}{2}(M+nm)u^2=\frac{1}{2}kx^2$$

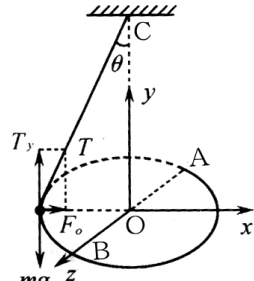
으로부터 $x=\sqrt{\frac{M+nm}{K}}u=l_0\sqrt{\frac{M}{M+nm}}$

12. 그림 2-4-3에서 보여준것처럼 작은 구가 원운동을 할 때 그 반경을 R라고 하자. 그러면 뉴톤의 제2법칙으로부터

$$F_{합}=mg\tan\theta=mR\omega^2$$

그림 2-4-3

이것을 풀면 $R=g\frac{\tan\theta}{\omega^2}$

구는 속도가 $v=\omega R=g\tan\theta/\omega$ 인 등속원운동을 한다. 구가 A점에서 B점까지 운동하는 과정에 작은 구에 대한 가는 끈의 장력 T가 드림선방향에서 가지는 힘덩이는

$$I_y=T_yt=mg\frac{\pi}{\omega}$$

그 방향은 y의 정방향이다. 운동량보존법칙으로부터 구가 수평방향으로 받는 T의 힘덩이는

$$I_x=mv_B-mv_A=2mg\frac{\tan\theta}{\omega}$$

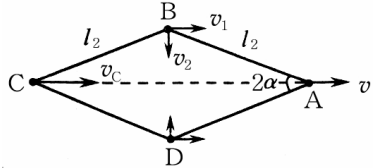
그 방향은 x축의 정방향이다.

또한 구가 y축방향으로의 운동량변화는 령이다. 장력 T의 이 방향에서의 분력은 령이므로 장력 T가 구에 주는 힘덩이는

$$I=\sqrt{I_x^2+I_y^2}=\frac{mg}{\omega}=\sqrt{\pi^2+4\tan^2\theta}$$

그 방향과 드림선방향사이의 좁은 각은

$$\tan\beta = \frac{I_x}{I_y} = \frac{2\tan\theta}{\pi}$$

13. 대칭성에 의하여 두개의 질점 B, D의 수평, 수직속도의 크기는 같다. 이 속도를 각각 v_1, v_2 이라고 하자. 질점 C의 속도방향은 C에서 A에로 향하며 그 속도는 v_C 로 하자. 그림 2-4-4에 표시했다. 끈 A,B방향에서 두 질점 A, B의 속도는 같고 BC 방향의 두 질점 B, C의 속도도 같다. 그리하여

$$v_1\cos\alpha + v_2\sin\alpha = v\cos\alpha,$$

$$v_1\cos\alpha - v_2\sin\alpha = v_C\cos\alpha$$

그림 2-4-4

AB에 수직인 방향에서 두 질점 B, C의 총운동량은

$$m(v_1+v_C)\sin\alpha - mv_2\cos\alpha = 0$$

우의 세 식을 련립하면

$$v_C = \frac{v\cos^2\alpha}{1+2\sin^2\alpha}, \cdot v_1 = \frac{v}{1+2\sin^2\alpha}; \quad v_2 = \frac{v\sin 2\alpha}{1+2\sin^2\alpha}$$

그러므로 계의 총운동량은

$$P = m(v+2v_1+v_C) = \frac{4mv}{1+2\sin^2\alpha}$$

총운동에네르기는

$$E_k = \frac{1}{2}m(v^2+2v_1^2+2v_2+v_C^2) = \frac{2mv^2}{1+2\sin^2\alpha}$$

14. 그림 2-4-5의 ㄱ에 보여주는것처럼 질점과 고리가 A점에서 충돌한다고 하자.

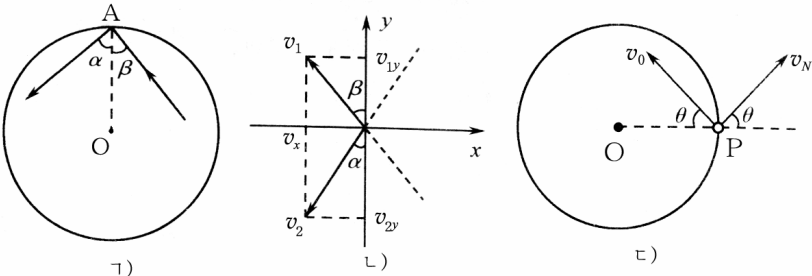



그림 2-4-5

고리안벽은 매끈하므로 고리와 질점사이의 호상작용힘은 고리의 반경방향으로 향한다. 그러므로 부딪치기 전과 후에 질점의

원둘레 접선방향의 속도변화는 없다. 튐성충돌을 하므로 그 충돌결수는 1이다. 그러므로 질점과 원고리가 충돌할 때 원고리의 반경방향에서의 상대속도의 크기와 방향은 변하지 않는다. 그림 2-4-5의 ㄴ에서 보여주듯이 직각자리표계를 설정하고 y축을 OA방향으로 하게 하자. v_1 는 질점이 부딪치기 전 원고리에 대한 상대속도이고 v_2 은 질점이 부딪친 후 원고리에 대한 상대속도이다. 앞에서 서술한것에 의해 v_1, v_2의 두 자리표축에 대한 성분량의 크기관계는 v_{1y} 와 v_{2y} 가 같고 v_{1x} 와 v_{2x} 가 서로 같다. 여기서 쉽게 알수 있는것처럼 그림에서 $\alpha=\beta$ 이다. 이에 근거하여 질점과 고리의 충돌에 대해서는 아래의 결론이 떨어진다.

고리는 오직 병진운동만 하며 회전운동은 하지 않는다.(고리가 받는 충돌힘의 작용선이 고리중심을 지나기때문이다.)

고리에 대해 상대적으로 보면 질점이 충돌할 때 반사각은 입사각과 같다. 질점이 고리의 P점으로 입사하고 또다시 P점에서 나올 때 질점의 충돌현상은 고리에 대해 상대적으로 보면 반사각이 입사각과 같다는것을 만족하며 질점이 고리안에서 N번 충돌할 때 지나간 로정은 원고리에 대해 본다면 $(N+1)$개의 변을 가진 바른다각형을 만든다. 질점이 P점에서 원고리에 입사할 때의 속도를 v_0 이라고 하자. v_0 과 PO방향사이각을 θ 라고 하면 앞에서부터 알수 있는것처럼 2θ 는 바른다각형$(N+1)$의 내각으로 되는데 즉

$$2\theta=\frac{N+1-2}{N+1}\cdot\pi=\frac{N-1}{N+1}\pi,$$

$$\theta=\frac{N-1}{N+1}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{N+1}$$

또한 그림 2-4-5의 ㄷ에서 v_N 은 질점이 고리안에 들어온 후 고리에 대한 상대속도이다. v_N 의 크기와 v_0 은 같으며 v_N 과 OP사이의 각은 θ 이다. v_N 과 v_0 이 OP에 수직인 방향의 성분량은 같다. 또한 동시에 전체 충돌과정에 고리는 회전운동을 하지 않는다. OP방향은 책상면에 대해 상대적으로 볼 때 변화를 일으키지 않는다. 우의 두 설명과 운동량보존법칙에 근거하여 다음의 판단을 내릴수 있다.

질점이 고리에서 튀여난 후 고리의 OP방향에 수직인 운동량은 령이다.

※ 이 판단의 근거는 질점이 고리에서 튀여난 후 고리의 OP방향에 수직인 방향에서 책상면에 대한 상대속도는 령이 아니며 책상면에 대해 상대적으로 본다면 질점이 고리에서 튀여날 때 고리와 질점이 OP방향에 수직인 총운동량은 질점이 고리에 들어설 때 OP에 수직인 방향에서의 운동량과 같지 않다. 이것은 운동량보존법칙과 서로 어긋난다.

즉 질점이 고리에서 튀여난 후 고리에서 OP방향에 수직인 속도는 여전히 령으로 되며 질점과 고리가 여러번 충돌한 총효과는 질점과 고리가 OP방향에서만 작용한다는것과 맞먹는다. 고리에 대해 본다면 질점의 OP방향으로의 속도성분량($v_0\cos\theta$)과 고리가 튕성충돌을 하는것으로 본다. 튕성충돌에 대한 모형으로부터 고리가 얻는 속도는

$$v_M=\frac{2mv_0\cos\theta}{M+m}=\frac{2mv_0}{M+m}\sin\frac{\pi}{N+1}$$

이것은 질점이 고리를 벗어난 후 고리중심의 책상면에 대한 상대속도이며 그 방향은 PO의 련결선인데 P에서 O에로 향한다.

15. 미끄러운 물체와 상자벽이 i번째 충돌한 후 미끄러운 물체와 상자의 땅면에 대한 상대속도는 각기 v_i와 u이다.

v_0의 방향을 정방향이라고 하고 미끄러운 물체와 상자를 하나의 계로 보면 충돌전과 후의 운동량은 보존된다.

$i=1$일 때 $mv_0=mv_1+mu$이다.

또한 충돌결수에 대한 식

$$e=\frac{v_2-v_1}{v_{10}-v_{20}}=\frac{u-v_i}{v_{i-1}-u_{i-1}}$$

으로부터 $v_1-u_1=ev_0$을 얻는다. 이 식을 풀어서

$$v_1=\frac{1}{2}(1-e)v_0,\quad u_1=\frac{1}{2}(1+e)v_0$$

을 얻고 같은 방법으로 $i=n$일 때

$$mv_0=mv_n+mu_n$$

$$v_n-u_n=-e(v_{n-1}-u_{n-1}=\cdots=(-e)^n v_0$$

을 얻으며 이것을 풀면

$$v_n=\frac{1}{2}[1+(-e)^n]v_0,\quad u_n=\frac{1}{2}[1-(-e)^n]v_0$$

을 얻는다. 미끄러운 물체와 상자가 n번 충돌한 후 총운동에네르기는

$$E_{Kn}=\frac{1}{2}mv_n^2-\frac{1}{2}mu_n^2=\frac{1}{4}mv_0^2(1+e^{2n})$$

계가 잃어버린 운동에네르기는

$$\Delta E_{Kn}=E_{K0}-E_{Kn}=\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{1}{4}mv_0^2(1+e^{2n})=\frac{1}{2}mv_0^2\cdot\frac{1-e^{2n}}{2}$$

문제의 의미로부터 $\frac{\Delta E_{Kn}}{E_{K0}}\le 0.4,\quad \frac{1-e^{2n}}{2}\le 0.4\ \rightarrow\ n\le 4.6$

이로부터 계가 손실한 총운동에네르기는 처음 운동에네르기의 40%보다 작아야 한다.

미끄러운 물체와 상자가 충돌한 수는 4보다 많아서는 안된다.

제5장. 천체의 운동

1. 4)

풀이방향: 위성의 고도를 낮추면 위성이 지구에 대하여 상대적으로 동쪽으로《떠간다.》고 볼수 있다. 즉 지구의 자전보다 더 빠르며 회전주기는 좀 작아진다. 따라서 반경을 감소시켜야 하는데 먼저 아래로 고도를 조절하고 동경 128°에서 다시 우로 고도를 조절해야 한다.

2. 1)

풀이방향: 만일 련속체라면 고리안의 매개 점의 각속도는 반드시 같다. 즉 $v=\omega R\propto R$

만일 위성들의 집합체라면 고리안의 매 위성의 향심력은 만유인력에 의해 계산된다.

$$\frac{GMm}{R^2}=\frac{mv^2}{R},\quad v^2\propto\frac{1}{R}$$

3. 4)

풀이방향: 운동의 합성과 뉴톤의 운동법칙을 고려할것

4. $\frac{T_b{}^2}{T_a{}^2}$

풀이방향: 행성의 질량 M, 위성의 질량은 m, 행성의 반경 R 라고 하면 위성이 행성주위로 운동할 때

$$\frac{GMm}{R^2}=m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\cdot R$$

또한 행성의 밀도는 $\rho=\frac{M}{V}=\frac{\pi}{GT^2}$

따라서 $$\rho_A:\rho_B=\frac{{T_b}^2}{{T_a}^2}$$

5. 두 별의 질량을 각각 M_1, M_2 이라고 하자.
그러면 모두 련결선우의 어떤 점둘레로 주기가 T 인 원운동을 한다. 별 1과 별 2에서 그 점까지의 거리는 각각 L_1 와 L_2 이다. 만유인력법칙과 뉴톤의 제2법칙 및 기하학적조건으로부터

$$G\frac{M_1M_2}{R^2}=M_1\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\cdot L_1,\quad G\frac{M_1M_2}{R^2}=M_2\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\cdot L_2,\quad L_1+L_2=R$$

이 식들을 련립하여 풀면

$$M_1+M_2=\frac{4\pi^2R^3}{GT^2}$$

6. 사람들은 원고리형의 우주촌의 변두리에서 생활한다. 사람에 대한 변두리의 맞선힘이 향심력으로 되며 이 크기는 사람이 땅면우에서 받는 중력과 같다. 뉴톤의 제2법칙에 의하여

$$mg=m(2\pi n)^2r$$

따라서

$$n=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{r}}=5\times10^{-2}\mathrm{s}^{-1}$$

7. 문제에서 용수철저울로 재여 얻은 물체의 무게 W 와 W' 는 실제상 용수철저울로 읽은 수자이다. 즉 용수철의 튕힘이다. 행성의 두 극에서 물체는 만유인력 $F_{인}$ 과 용수철저울의 튕힘 W 의 작용을 받는다. 이곳에서 물체는 회전운동을 하지 않고 정지상태에 있으므로

$$F_{인}=W=G\frac{M\cdot m}{R^2}$$

(식에서 M 을 행성의 질량, m 은 물체의 질량, R 는 행성의 반경이다.)

또한

$$M = \rho V = \rho \cdot \frac{4\pi R^3}{3} \quad \rightarrow \quad \rho = \frac{3W}{4\pi G R m}$$

행성의 적도위치에서 물체는 만유인력 $F_{인}$ 과 행성의 자전운동에 따르는 용수철저울의 됨힘 W' 의 작용을 받는다. 따라서

$$F_{인} - W' = m\frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

또한 $F_{인} = W$ 이므로

$$W - W' = m\frac{4\pi^2}{T^2}R \quad \rightarrow \quad mR = \frac{(W - W')T^2}{4\pi^2}$$

우의 매 식을 정돈하면

$$\rho = \frac{3W\pi}{GT^2(W - W')}$$

를 얻는다.

8. 3 946±10, 1.5×10^6

풀이방향:

1) 문제에서 《게모양별구름》으로부터 지구까지의 거리가 5 000ly이라는데 대하여 주의한다.

2) 《게모양별구름》의 펼친각도라는 의미는 지구상의 관찰자가 《게모양별구름》의 직경을 바라보는 각도이다.

9. 땅면우에서 시험할 때 용수철의 됨성자리에네르기는 원뿔체의 운동에네르기로 전환된다. 그러므로 압축된 용수철의 자리에네르기는

$$E_P = \frac{1}{2}mv_0^2$$

이다. 만일 분리되기 전 궤도우에서 로케트의 운동속도를 v, 분리된 후의 로케트의 속도를 v_1', 원뿔체의 속도를 v_2' 라고 하자. 력학적에네르기보존법칙과 운동량보존법칙에 의하면

$$(M + m)v_1 = Mv_1' + mv_2', \quad \frac{1}{2}(M + m)v_1^2 = \frac{1}{2}Mv_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2$$

이로부터

$$v_{상대} = v_1' - v_2' = v_0\left(1+\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{2}} = 5.6\text{m/s}$$

를 얻는다.

10. 1) $\frac{GMm}{R^2} = mR\omega^2$, $M = \rho\frac{4}{3}\pi R^3 \quad \rightarrow \quad \rho = \frac{3\omega^2}{4\pi G}$

2) $\rho = \frac{3\omega^2}{4\pi G} = \frac{3\times(60\pi)^2}{4\pi\times 6.67\times 10^{-11}} = 1.27\times 10^{14}(\text{kg/m}^3)$

3) $M = \rho\frac{4}{3}\pi R^3$

따라서

$$R = \sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi\rho}} = \sqrt{\frac{3\times 2\times 10^{30}}{4\times 3.14\times 1.27\times 10^{14}}} = 1.55\times 10^5(\text{m})$$

11. m_1가 m_2주위로 반경이 l인 원운동을 한다고 생각하자. m_2은 원의 중심이다. 두 질점사이에 만유인력이 작용하므로 m_1는 태양계의 행성의 운동과 같이 볼수 있다. m_1가 점 A에서 속도가 최소로 되고 점선을 따라 타원운동을 한다고 보자. 이때 m_2은 초점인데 그림 2-5-1에서 보여주었다. 원운동과 타원운동의 주기를 각각 T와 T', 원의 반경과 타원의 긴 반경을 각각 l, l'라고 하자.

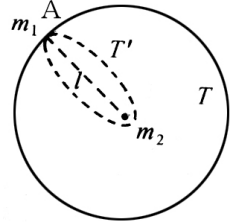



그림 2-5-1

케플레르의 제3법칙

$$\frac{T^2}{l^3} = \frac{T'^2}{l'^3}$$

로부터 m_1가 점 A에서 속도가 령으로 될 때 $l' \rightarrow \frac{l}{2}$

m_1가 점 A에서 m_2까지 운동하는데 걸리는 시간은 $t = T'/2$이다. 또한 m_1가 원운동할 때 향심력의 작용을 받는다.

$$F_n = G\frac{m_1 m_2}{l^2} = m_1 l\frac{4\pi^2}{T^2} \quad \rightarrow \quad \frac{T^2}{l^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_2}$$

따라서

$$T' = 2\pi l'^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{Gm_2}}$$

그러므로

$$t = \frac{T'}{2} = \pi l'^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{Gm_2}} = 1.36 \times 10^8 (\text{s})$$

12. 미싸일이 우로 올라가는 최대높이를 h라고 하자.

력학적에네르기보존법칙에 의하면

$$-G\frac{Mm}{R} + \frac{1}{2}mv_0^2 = -G\frac{Mm}{R+h} + \frac{1}{2}mv^2$$

이 성립한다.

미싸일의 운동은 케플레르의 제2법칙을 따르며 미싸일이 최고높이에 올랐을 때 그 속도방향은 미싸일과 지구중심을 련결하는 선에 수직이다. 그러므로 $Rv_0 \sin\alpha = (R+h)v\sin 90°$ 를 풀면 $h = R\cos\alpha$ 이다.

13. 1) 쌍둥이별이 그것들을 련결하는 선의 중심주위로 원운동을 한다. 운동속도를 v 라고 하면 향심가속도는 다음의 방정식을 만족한다.

$$\frac{GM^2}{L^2} = M\frac{v^2}{L/2} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM}{2L}}$$

그 주기는

$$T_0 = \frac{2\pi(L/2)}{v} = \pi L\sqrt{\frac{2L}{GM}}$$

2) 관측결과로부터 별의 운동주기는

$$T = \frac{1}{\sqrt{N}}T_0 < T_0$$

이것은 쌍둥이별계가 받는 향심력이 자체의 끌힘보다 크며 결과적으로는 중심으로 향하는 그 어떤 다른 힘을 받는다는것을 말한다. 문제의 의미를 보면 이 작용은 골고루 분포된 검은구멍으로부터 온다. 구안에 고르롭게 분포된 검은구멍의 쌍둥이별계에 대한 작용은 질량이 구안에 포함한 검은구멍의 전체 질량 M' 와 같으면서 중심점에 위치하고 있는 질점의 작용과 맞먹는다. 검은구멍의 작용을 고려한 후 쌍둥이별의 속도 즉 관측된 속도는 v_0 이다. 그러면

$$M\frac{v_0^2}{L/2}=\frac{GM^2}{L^2}+G\frac{MM'}{(L/2)^2} \rightarrow v_0=\sqrt{\frac{G(M+M')}{2L}}$$

자리길이 일정할 때 주기와 속도는 거꿀비례하며 이로부터

$$\frac{1}{v_0}=\frac{1}{\sqrt{N}}\cdot\frac{1}{v}$$

이고 나아가서

$$M'=\frac{N-1}{4}M$$

이다. 구하려는 검은구멍의 밀도를 ρ라고 하면

$$\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot\left(\frac{L}{2}\right)^3\cdot\rho=\frac{N-1}{4}M \rightarrow \rho=\frac{3(N-1)M}{2\pi L^3}$$

14. 1) $m_2 \ll m_1$이므로 우주비행선은 일정한 속도로 지구주위로 운동하며 위성의 운동은 우주비행선의 지구에 대한 원운동과 위성의 우주비행선에 대한 원운동의 합성이다. 그림 2-5-2에 보여주었다. m_1에 대해서

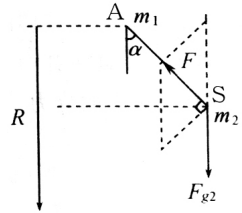



그림 2-5-2

$$m_1\omega^2 R_{지}=\frac{Gm_1m_{지}}{R^2} \rightarrow \omega^2=\frac{Gm_{지}}{R^3}$$

m_2 에 대해

① m_1와 함께 지구주위로 운동한다.

$$F'=\frac{F}{\cos\alpha}$$

이므로

$$F_{g2}-\frac{F}{\cos\alpha}=m_2\omega^2(R-L\cos\alpha)$$

또한

$$F_{g2}=\frac{Gm_2m_{지}}{(R-L\cos\alpha)^2}=\frac{Gm_2m_{지}}{R^2}(1+\frac{2L}{R}\cos\alpha)$$

웃식으로부터

$$F=\left[F_{g2}-m_2\omega^2(R-L\cos\alpha)\right]\cos\alpha=3m_2\omega^2L\cos^2\alpha$$

② 우주비행선주위로 운동할 때 접선방향의 각가속도를 β 라고 하면

$$F'' = F\tan\alpha$$

그러므로

$$m_2 L\beta = -F\tan\alpha = 3m_2\omega^2 L\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

이로부터

$$\beta + 3m_2\omega^2 L\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 0$$

α가 상수라면 $\beta = 0$이다.

즉 $\sin\alpha = 0$일 때 $\alpha_0 = 0$ 혹은 $\alpha_0 = \pi$

$\cos\alpha = 0$일 때 $\alpha_0 = \dfrac{\pi}{2}$ 혹은 $\alpha_0 = \dfrac{3}{2}\pi$

2) 만일 힘모멘트 $M = F\tan\alpha\cdot L$ 의 +, －부호의 변화와 ($\alpha, -\alpha_0$)의 부호의 변화가 반대로 된다면 평형상태에 있게 된다. 대응되는 변화로부터 0, π 각을 취할 때 평형상태로 되고 $\pi/2$와 $3\pi/2$를 취할 때 비평형상태에 놓인다.

15. 지구와 씨리우스별, 씨리우스별과 같이 도는 짝패별의 운동자리길을 그림 2-5-3에 보여주었다. 씨리우스별의 질량을 M, 같이 도는 짝패별의 질량을 m, 그의 거리를 a라고 하자.

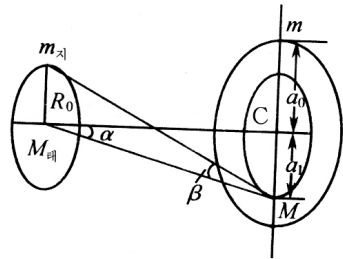



그림 2-5-3

그림에서 a_1, a_2 은 각각 씨리우스별과 그와 같이 도는 짝패별들로부터 그것들의 질량중심 C까지의 거리이다. 씨리우스별이 C주위를 돌 때 그 향심력은 씨리우스별과 그와 함께 도는 별사이의 만유인력에 의해 생긴다.

각속도를 ω라고 하면

$$\frac{GMm}{(a_1+a_2)^2} = M\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a_1$$

그러므로

$$T^2=\frac{4\pi^2 a_1(a_1+a_2)^2}{Gm}$$

또한 그림으로부터 알수 있는것처럼

$$\frac{a_1}{\tan\alpha}=\frac{a_1+R_0}{\tan(\alpha+\beta)}$$

α, β가 다 작으므로

$$\tan\alpha\approx\alpha,\quad \tan(\alpha+\beta)\approx\alpha+\beta$$

$$a_1=\frac{\alpha}{\beta}R_0=\frac{23°}{0.376°}R_0=6.12R_0$$

$$ma_2=Ma_1\ \rightarrow\ a_2=\frac{M}{m}a_1$$

따라서

$$T^2=\frac{6.12^3\times4\pi^2(m+M)^2R_0^3}{Gm^3}$$

또한 지구가 태양주위로 공전할 때 반경이 R_0, 주기 T_0 =1a이라고 하면

$$\frac{G\cdot M_{태}m_{지}}{R_0^2}=m_{지}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2R_0$$

$$T_0^2=\frac{4\pi^2R_0^3}{GM_{태}}$$

나아가서

$$\frac{T_0^2}{T^2}=\frac{1}{6.12^3}\cdot\frac{m^3}{(m+M)^2}\cdot\frac{1}{M_{태}},\quad 23(m+M_{태})^2=250\frac{m^3}{M_{태}}$$

웃식을 풀면

$$\frac{m}{M_{태}}=1$$

제6장. 물체의 평형

1. 3)

풀이방향. 전체 과정에서 반구의 작은 구에 대한 맞선힘 N과 끈의 작은 구에 대한 장력 T의 합력은 변하지 않으며 이 합력 T와 N은 닫긴벡토르3각형을 형성한다. 그림에서 우에서 서술한 벡토르3각형과 류사한 3각형을 찾을수 있는데 이 3각형의 3개의 정점은 각각 고정도르래, 작은 구와 반구의 중심이다. 닮음3각형의 비례관계를 리용하여 풀수 있다.

2. 3)

풀이방향. A와 B의 공통의 중력중심이 책상의 변두리를 벗어나면 안된다.

3. ㄱ)

풀이방향. a와 b를 고찰대상으로 하고 평형원리를 리용하여 구할수 있는 정확한 도형은 ㄱ밖에 없다.

4. 1) 그림 2-6-1과 같이 A위치에서 최소한의 힘을 가하려면 힘의 방향은 AP에 수직이며 이렇게 하여야 힘의 팔이 가장 크다. $r=2h$이므로 기하학적관계로부터 $\angle PAO=30°$, $\angle POB=60°$이다. 만일 원기둥체가 P축주위로 굴러올라가게 하자면 이때는 땅면의 원기둥체에 대한 맞선힘이 $N=0$이다. 이때 장력 F와 중력의 점 P에 대한 힘모멘트들이 평형을 이루므로 이로부터

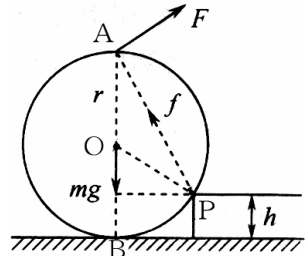



그림 2-6-1

$$mgr\sin 60° = F\cdot 2r\cos 30°$$

따라서

$$F=2.5\times10^2\text{N}$$

2) 원기둥체에 대한 계단의 작용힘을 f라고 하자. 운동하기 시작했을 때 f와 중력 mg 및 장력 F의 세 힘이 평형을 이루며 반드시 한 작용점을 가진다.

이로부터 힘 f의 방향은 PA의 방향이다. 즉 힘 f의 방향과 F의 방향은 수직이다.

그러므로 f의 크기는 중력의 AP방향성분힘과 같다. 즉

$$f = mg\cos 30°$$

$$f = 4.3\times 10^2\text{N}$$

5. 날수 있는 림계속도는 $F = G$를 만족해야 한다. 즉

$$CSv^2 = mg \rightarrow v = \sqrt{\frac{mg}{CS}} \propto \sqrt{L}$$

타조가 나는데 필요한 최소속도 v는

$$\frac{v'}{v} = \sqrt{\frac{L'}{L}} = \sqrt{25} = 5$$

즉

$$v' = 27.5\text{m/s}$$

그러므로 타조는 날수 없다.

6. 1) 연마반이 정지했을 때 막대기 AB의 작업대상을 하나의 물체로 보면 그것이 받는 외력은 축 A에 대하여 힘모멘트를 가진다. 즉 중력의 힘모멘트

$$(m_1 + m_2)g\frac{1}{2}$$

연마반의 공구에 대한 맞선힘의 힘모멘트는

$$F_0\frac{l}{2}$$

F_B의 힘모멘트는 $F_\text{B}l$이다. 힘모멘트의 평형조건으로부터

$$F_0\frac{l}{2} = (m_1 + m_2)g\frac{l}{2} + F_\text{B}l \rightarrow F_\text{B} = \frac{1}{2}[F_0 - (m_1 + m_2)g]$$

수값을 넣으면 $F_\text{B} = 40\text{N}$이다.

2) 연마반이 회전운동할 때 중력과 맞선힘 F'_B의 힘모멘트외에도 공구에 대한 마찰력의 모멘트 $\mu F_0 d$도 작용한다.

힘모멘트의 평형조건으로부터

$$F_0\frac{l}{2} = \mu F_0 d + (m_1 + m_2)g\frac{l}{2} + F'_\text{B}l$$

를 풀면

$$F'_\text{B} = \frac{1}{2}[F_0 - (m_1 + m_2)g] - \mu F_0\frac{d}{l}$$

수값을 넣으면

$$F'_{\mathrm{B}} = 30\mathrm{N}$$

7. 그림 2-6-2와 같이 3차원자리표계를 택하고 ABCD를 자리표평면으로 하면 Oz축은 ABCD평면에 수직이다. 물체가 경사면에서 등속직선운동을 한다면 그가 받는 외부힘들의 합력은 령으로 된다. 3차원자리표계에서 힘을 분해하면 ABCD평면에 있는 모든 외부힘들의 벡토르합은 령이므로 물체는 F와 $G\sin\theta$의 합력방향으로 미끄러진다. 그리고 마찰력

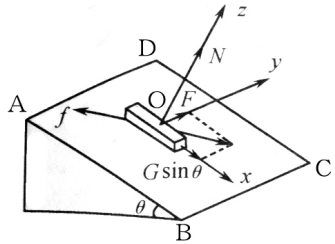



그림 2-6-2

$$f = \sqrt{F^2 + (G\sin\theta)^2} = 5\sqrt{2}\mathrm{N}$$

F와의 사이각은 135° 이다.

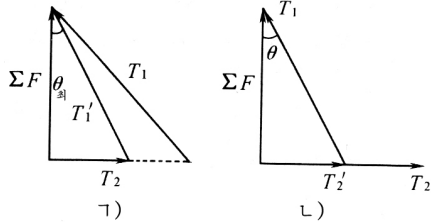
8. 그림 2-6-3의 ㄱ에서 끈 OA의 장력이 T_1에 이를 때 끈 OB의 장력은 이미 T_2보다 커지게 된다. 이것은 문제의 요구에 맞지 않는다. 왜냐하면 OA의 장력이 T_1에 이르기 전에 수평방향의 끈 OB가 이미 끊어지기때문이다. 그림으로부터

$$\sqrt{T_1^2 - T_2^2} \geq G$$

그림 2-6-3

이런 조건하에서 OB의 장력이 최대값에 이를 때 θ는 이미 최대값에 도달해있다.

$$\theta_{최} = \tan^{-1}\frac{T^2}{G}$$

다음으로 그림 ㄴ에 보여주는 다른 한 가능성은

$$\sqrt{T_1^2 - T_2^2} < G$$

인데 끈 OB의 장력이 T_2에 이르기 전에 OA가 먼저 끊어진다. 따라서 끈 OA의 장력이 T_1일 때 θ는 최대값에 이른다.

$$\theta'_{최} = \cos^{-1}\frac{G}{T}$$

9. 저울의 구조는 그림 2-6-4와 같다. 저울의 걸개 B로부터 손잡이까지의 거리는 d, 령표시점 A에서 손잡이까지의 거리는 l_0,

최대눈금 D로부터 손잡이까지의 거리는 l, 저울대와 저울걸개가 받는 중력을 P 라고 하면 저울이 수평을 이루었을 때 P 의 손잡이에 대한 팔의 길이는 d_0 이다. 저울추의 질량을 m , 저울의 최대측정량을 M 이라고 하자. 빈집상태에서 평형을 이룰 때

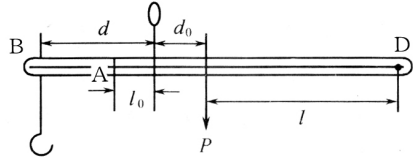



그림 2-6-4

$$Mgd = Pd_0 + mgl \ \rightarrow \ \ m = \frac{Md}{l_0 + l}$$

10. 그림 2-6-5의 ㄱ에 보여준것처럼 쇠고리의 반경을 R 라고 하자. 쇠고리에서 임의의 토막구간 Δl 을 취하면 그의 질량은

$$\Delta m = \frac{m}{2\pi R} \Delta l$$

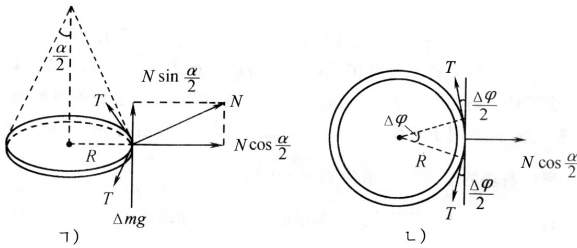



그림 2-6-5

Δm 이 받는 힘은 아래와 같다.

원뿔면의 맞선힘 N, (그 방향은 원뿔면에 수직이다.) 중력 Δmg 및 Δl 의 두 끝이 받는 장력은 T 이다. 그림 6-5의 ㄴ와 같이 Δl 의 쇠고리중심에 대한 펼친 각은 $\Delta\varphi$ 이다. 그러면

$$2T \sin \frac{\Delta\varphi}{2} = N \cos \frac{\alpha}{2}$$

Δl 이 아주 짧으므로 $\Delta\varphi$ 도 아주 작다. 그러므로

$$\sin \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\Delta\varphi}{2}$$

를 넣으면

$$T\Delta\varphi = N \cos \frac{\Delta\varphi}{2}$$

토막 Δl 은 힘평형을 이루므로

$$\Delta mg = N\sin\frac{\alpha}{2}$$

우의 두 식으로부터

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\Delta mg}{T\Delta\varphi} = \frac{mg}{2\pi T}$$

쇠고리의 장력은

$$T = \frac{mg}{2\pi\tan\frac{\alpha}{2}}$$

11. 나무를 쌓아서 문제의 그림 2-6-6과 같은 구멍이 있는 다리를 만들 때 다리구멍의 높이 $H = 10h - h = 9h$ 이다. 최대너비 S 는 아래와 같이 구할수 있다. 쌓은 나무토막들이 미끄러우므로 제일 웃층의 나무토막들사이에는 수평방향의 호상작용힘이 없어야 하며 기타 매 나무토막들사이에도 수평방향의 작용힘이 없어야 한다. n 번째 나무토막 끝점과 $n+1$ 번째 나무토막끝점사이 거리는 Δx_n 이다. n 번째 나무토막우에는 모두 $n-1$ 개의 나무토막이 있는데 중력의 합력의 작용선을 n 번째 나무토막의 모서리 B점의 왼쪽 혹은 B점을 통과한다. 그렇지 않으면 우의 나무토막들이 평형을 이룰수 없다. 지지점사이거리 S 가 가장 큰것을 요구하므로 중력의 합력은 점을 통과해야 한다. $n+1$ 번째 나무토막의 모서리 A를 지지점으로 잡으면 n 번째 나무토막의 힘모멘트의 평형조건은

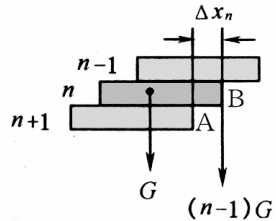



그림 2-6-6

$$(n-1)G\Delta x_n = G\left(\frac{L}{2} - \Delta x_n\right)$$

식에서 G 는 매 나무토막이 받는 중력이다. 이 식을 풀면

$$\Delta x_n = \frac{L}{2n} = \frac{2h}{n}$$

그러므로

$$S = 2\sum_{n=1}^{9}\Delta x_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{9}\right) = 11.32\text{h}$$

따라서

$$\frac{S}{H}=\frac{11.32h}{9h}=1.258$$

12. 부표가 평형위치에서 미소각 α 만큼 벗어났다고 하자.(그림 2-6-7) 아래결구의 곡률중심 O를 기준점으로 잡았다고 하면 전체 부표계(부표와 막대기)는 두개의 힘모멘트의 작용을 받는다.

그림 2-6-7

중력 m_1g 의 O점에 대한 힘모멘트는

$$M_1=m_1g(R-\frac{h}{2})\sin\alpha$$

중력 m_2g 의 O점에 대한 힘모멘트는

$$M_2=m_2g(R-\frac{h}{2})\sin\alpha$$

전체 힘모멘트는

$$M=M_1+M_2=m_1g(R-\frac{h}{2})\sin\alpha+m_2g(\frac{l}{2}-R)\sin\alpha=$$

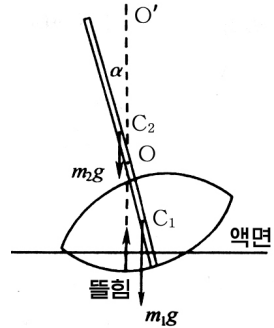
$$=\left[(m_1+m_2)R-\frac{l}{2}(m_1h+m_2l)\right]g\sin\alpha=$$

$$=\left[R-\frac{m_1h+m_2l}{2(m_1+m_2)}\right](m_1+m_2)g\sin\alpha$$

$$x=R-\frac{m_1h+m_2l}{2(m_1+m_2)}$$

$$M=x(m_1+m_2)g\sin\alpha$$

따라서 $x>0$인 때 $M>0$
전체 힘모멘트는 되돌이힘모멘트이며 안정한 평형상태에 놓인다. $x<0$인 때 $M<0$이다. 전체 힘모멘트는 기울어지게 하는 힘모멘트로 되여 불안정한 평형상태에 놓인다.
$x=0$, $M=0$인 때 전체 힘모멘트는 령으로 되여 중립평형에 놓인다.

13. 수평으로 된 호수바닥에 매 변의 길이가 L인 바른6면체의 물체가 있는데 그 질량분포는 고르로우며 밀도는 ρ이다. 물체의 오른쪽 측면에 속도가 v인 물흐름이 이 측면에 수직으로 왼쪽방향에서부터 온다고 하자. 이 물흐름이 오른쪽측면에 주는 힘을

F라고 하면 물체는 물의 뜰힘 Q와 중력 G의 작용을 동시에 받는다. C는 물체의 중력중심이다.(그림 2-6-8) F의 작용은 물체를 움직이게 하는 점이다. 그리고 G와 Q의 합력 P는 아래로 향한다. 강바닥의 물체에 대한 맞선힘은

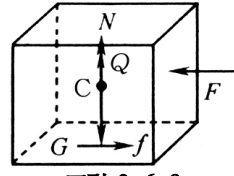



그림 2-6-8

$$N=P=G-Q$$

강바닥의 물체에 대한 미끄럼마찰력은

$$f=\mu N=\mu(G-Q)$$

만일 물체가 움직이지 않는다고 하면

$$F\le\mu(G-Q)$$

여야 한다. 문제에 이미 주어진 조건에 따라

$$F=kv^2L^2 \text{ (}k\text{는 비례결수)}$$

물의 밀도를 ρ이라고 하면

$$P=G-Q=(\rho-\rho_0)gL^3$$

이것을 정리하면

$$kv^2L^2\le\mu(\rho-\rho_0)gL^3$$

$$\text{즉}\quad L\ge\frac{kv^2}{\mu(\rho-\rho_0)g}$$

따라서 물체의 중력은 $G=\rho gL^3\ge\dfrac{\rho k^3v^6}{\mu^3g^2(\rho-\rho_0)^3}$

으로 표시할수 있다. 이제

$$C=\frac{\rho K^3}{\mu^3g^2(\rho-\rho_0)^3}$$

으로 표시할수 있다. 이 식으로부터 $G<Cv^6$인 물체는 이러한 물흐름의 충격을 받으면 밀려가게 된다. 즉 물속에서 물흐름때문에 밀려가는 물체의 무게는 물흐름속도의 6제곱에 비례한다는것을 알수 있다. (류체력학에는 《물의 흐름속도가 n배 증가하면 그 물흐름에 의해 밀려가는 물체의 무게는 n^6배로 커진다.》라는 법칙이 있는데 우의 결론은 이 법칙의 내용을 반영하고 있다.)

13. 얇은 관의 마개를 뽑은 후 얇은 관의 아래단 A위치에서의 요소액체토막이 웃쪽과 아래쪽에서 받는 압력은 그림 2-6-9와 같다. 웃쪽의 압력은

$$P'_{\mathrm{A}} = P_0 + \rho_1 g(H + l)$$

이고 아래쪽의 압력은

$$P''_{\mathrm{A}} = P_0 + \rho_1 g(H + l)$$

이다.

그림 2-6-9

여기서 P_0 은 대기압이다. $\rho_2 > \rho_1$ 이므로 $P' > P''_{\mathrm{A}}$ 이다.

이것이 관안의 밀도가 큰 액체를 관밖을 밀어내는 작용을 한다. 관이 대단히 가늘고 또 웃쪽과 아래쪽의 압력차가 크지 않으므로 각종 내부마찰 등의 영향하에서 밀도가 큰 액체는 서서히 흘러나간다. 작은 용기안의 액체변은 계속 아래로 내려가서 얇은 관의 A점에서의 웃쪽과 아래쪽의 압력이 서로 같아지면 밀도가 큰 액체는 계속 흘러나가지 않는다. 작은 용기의 자름면적이 큰 용기보다 훨씬 작다는것에 주의를 돌리며 큰 용기의 액체높이는 변하지 않는것으로 볼수 있다. 평형을 이루었을 때 작은 용기안의 액체면은 Δx 만큼 내려간다. A끝에서 웃쪽의 압력은

$$p'_{\mathrm{A1}} = P_0 + \rho_2 g(H - \Delta x + l)$$

아래쪽의 압력은 $p''_{\mathrm{A1}} = P_0 + \rho_1 g(H + l)$ 으로 된다.

$p'_{\mathrm{A1}} = p''_{\mathrm{A1}}$ 로부터

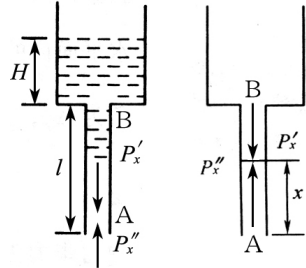
$$\rho_2 g(H - \Delta x + l) = \rho_1 g(H + l)$$

$$\Delta x = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2}(H + l)$$

그러므로 처음에 작은 용기에서 흘러나오는 액체질량은

$$\Delta m_1 = \rho_2 \Delta x S = (\rho_2 - \rho_1)(H + l)S$$

이러한 평형은 불안정한것이다.

액체안에서의 미세한 요동은 관안의 밀도가 큰 액체를 웃쪽으로 미소량 x 만큼 올리밀게 한다. 그림에서 보여주듯이 웃쪽 압력은 $P'_x = P'_{\mathrm{A1}} - \rho_2 g x$

아래쪽의 압력은 $p''_x = p''_{A1} - \rho_1 gx$ 이 된다

(여기서 다시 아래와 같이 근사적으로 취급하자. 얇은 관의 자름면적은 S보다 훨씬 작으며 얇은 관안의 밀도가 큰 액체가 작은 용기로 다시 흘러들어온 후 작은 용기의 액체면의 높이는 거의 변하지 않는다.)

$$P'_{A1} = p''_{A1},\quad \rho_2 > \rho_1 \text{ 이므로 } P'_x < P''_x$$

이것은 얇은 관안의 밀도가 큰 액체는 줄곧 되돌아 올리흐른다는것을 보여준다. 밀도가 큰 액체면이 올리흘러 얇은 관의 꼭대기 B에 이른 후 밀도가 작은 액체는 우로 떠오른다. 이것은 작은 용기안의 전체적인 액체면의 높이를 부단히 증가시켜 얇은 관의 아래쪽과 웃쪽의 압력이 같아지면 흐름이 정지된다는 것을 의미한다. 즉 $P'_B = P''_B$ 이다. 이후로 부단히 순환이 진행되는데 작은 용기의 밀도가 큰 액체가 전부 빠져 큰 용기의 밑부분에 쌓일 때까지 진행된다. 작은 용기안에 밀도가 작은 액체로 결국 바뀌여진다. 계전체의 에네르기가 최소상태에 이르게 되여 안정한 평형상태에 이르게 된다.
이러한 순환과정에서 작은 용기속에 들어가는 밀도가 작은 액체의 임의의 질량 m_k 와 용기에서 빠져나가는 밀도가 큰 액체의 임의의 질량 m_n 을 계산하자. 매번 밀도가 작은 액체가 작은 용기에 들어가는 시각에 $P'_{AK} = P''_{AK}$ 이다. 이 작은 용기에 Δx_k 만 한 높이의 밀도가 작은 액체가 흘러들어온 후 얇은 관의 끝 B점에서의 웃쪽과 아래쪽의 압력을 같다고 하자. 즉

$$P'_{AK} - \rho_2 gl + \rho_1 g\Delta x_k = P''_{AK} - \rho_1 gl$$

따라서

$$\Delta x_k = (\rho_2 - \rho_1)gl / \rho_1$$

$$\Delta m_k = \rho_1 \Delta x_k S = (\rho_2 - \rho_1)lS$$

또한 매번 밀도가 큰 액체가 작은 용기에 흘러나가는 시각에

$$P'_{Bn} = p''_{Bn}$$

이다.
작은 그릇안의 밀도가 큰 액체의 높이가 Δx_n 만큼 감소한 후 얇은 관의 끝에서의 아래쪽과 웃쪽의 압력이 같다고 하자. 즉

$$P'_{Bn} + \rho_2 gl - \rho_2 g\Delta x_n = p''_{Bn} + \rho_2 gl$$

따라서

$$\Delta x_n = (\rho_2 - \rho_1)gl / \rho_2$$

$$\Delta m_n = \rho_2 \Delta x_n l = (\rho_2 - \rho_1)lS = \Delta m_k$$

15. 나무굴대의 질량을 m, 벽면의 맞선힘과 마찰력(웃쪽)을 N_1, F_1, 나무판의 맞선힘과 마찰력을 N_2, F_2이라고 하자.(그림 2-6-10) 나무판과 벽면의 사이각을 θ라고 하자. 나무굴대의 평형조건식은 드림선방향에서

$$F_1 + N_2 \sin\theta + F_2 \cos\theta = mg \quad (1)$$

수평방향에서

$$N_1 = N_2 \cos\theta - F_2 \sin\theta \quad (2)$$

$$F_1 R = F_2 R \quad (3)$$

그림 2-6-10

나무굴대가 벽면에서 먼저 미끄러진다. 이때

$$F_1 = F_{1최} = \mu_1 N_1 \quad (4)$$

$$F_2 \le F_{2최} = \mu_2 N_2 \quad (5)$$

식 3에 의해 벽면에서 미끄러질 조건은 식 4 5를 합쳐서

$$\mu_1 N_1 \le \mu_2 N_2 \quad (6)$$

식 2, 3, 4로부터

$$N_1(1 + \mu_1 \sin\theta) = N_2 \cos\theta \quad (7)$$

식 6, 7로부터

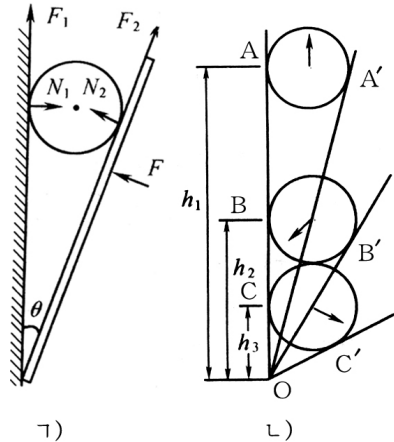
$$\frac{\cos\theta}{\mu_2} \le \frac{1}{\mu_1} + \sin\theta \quad (8)$$

$\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 1/\sqrt{3}$ 을 식 8에 넣으면

$$\sqrt{3}\cos\theta \le 1 + \sin\theta \quad (9)$$

이것이 벽면에서 미끄러질 때 θ가 만족해야 할 조건이다. 이 식으로부터 알수 있는것처럼 θ가 작을 때 이 식은 만족할수 없다. θ가 림계각 θ_0보다 커야 발생한다. θ_0은

$$\sqrt{3}\cos\theta_0 \le 1 + \sin\theta_0 \quad (10)$$

을 만족한다. 이 식은 식 8이 갈기부호를 가지는 경우에 해당

된다. 이로부터 알수 있는것처럼 이때에 최대마찰력이 림계상태에 놓이게 된다. θ가 θ_0보다 작을 때 나무판에서 미끄러진다. 즉 나무굴대가 벽에서만 미끄러지고 나무판대기에서는 미끄러지지 않는다.

1) 나무굴대가 나무판에서 미끄러질 때의 조건을 론의해보자.
그때

$$F_2 = F_{2최} = \mu_2 N_2 \qquad (4')$$

$$F_1 \le F_{1_{최}} = \mu_1 N_1 \qquad (5')$$

이때 나무판에서 미끄러질 조건은

$$\mu_1 N_1 \ge \mu_2 N_2 \qquad (6')$$

로 된다. 식 2, 3, 4′로부터 N_1와 N_2의 관계는

$$N_1 = N_2(\cos\alpha - \mu_2 \sin\theta) \qquad (7')$$

식 6′, 7′로부터

$$\frac{1}{\mu_2}\cos\theta \ge \frac{1}{\mu} + \sin\theta \qquad (8')$$

이 식은 식 8과 반대된다.
즉 나무판에서의 미끄러지는 $\theta < \theta_0$일 때 발생한다. $\theta < \theta_0$일 때 나무판에서 미끄러진다.

2) 림계각 θ_0을 구하자. 즉 식 10의 량변을 두제곱하여 $\cos\theta_0$을 없애면

$$2\sin^2\theta_2 + \sin\theta_0 - 1 = 0 \qquad (11)$$

$$\sin\theta_0 = \begin{cases} 1/2 & \theta_0 = 30^0 \\ -1 & \theta_0 = -90^0 \end{cases}$$

그 풀이가 $\theta_0 = 30^\circ$일 때 식 10을 만족한다. 이 식 10이 구려는 풀이이다. 다른 풀이는 $\theta_0 = 90^\circ$인데 식 10을 만족하지 않으므로 버린다. 결국 $\theta = 15^\circ \sim 30^\circ$일 때 나무판에서 미끄러진다. $\theta = 30^0 \sim 60^0$일 때 왼쪽에서 미끄러진다.

3) 화살표의 회전각을 구하자. 각이 15°, 30°, 60°일 때 나무굴대중심의 높이를 h_1, h_2, h_3 이라고 하면

$$\frac{r}{h} = \tan\frac{\theta}{2}$$

그러므로 그림으로부터

$$AO = A'O = h_1 = r\cos\left(\frac{15°}{2}\right) = 7.57r$$

$$BO = B'O = h_2 = r\cos\left(\frac{30°}{2}\right) = 3.73r$$

$$CO = C'O = h_3 = r\cos\left(\frac{60°}{2}\right) = 1.73r$$

나무굴대가 A에서 B까지 떨어질 때 시계바늘방향으로 각 φ만큼 돌아간다.

$$\varphi_1 = (h_1 - h_2)/r = 3.84\mathrm{rad} = 220°$$

B에서 C까지 떨어질 때 나무굴대는 나무판에서 시계바늘반대방향으로 φ_2만큼 돈다.

$$\varphi_2 = \frac{(h_2 - h_3)}{r} = 2.00\mathrm{rad} = 115°$$

이 과정에 나무판자체는 시계바늘방향으로 30° 만큼 돈다. 그러므로 화살표는 마지막으로 $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 + 30° = 135°$ 를 자리키게 된다. 그러므로 화살표는 최종적으로 수직의 웃쪽으로부터 시계바늘방향으로 135° 돌아선것을 가리킨다.

제7장. 력학적진동과 력학적파동

1. 3)

풀이방향: 진동그라프에서 Δt 크기를 선택하여 론의한다.

2. 1) a, b　　2) c

풀이방향: 두개의 간섭성파동이 서로 만날 때 마루와 마루가 만나는 점, 골과 골이 만나는 점은 모두 진동의 세기가 커지는 점들이다.

3. $T = 2\pi\sqrt{\frac{l\sin\alpha}{g}}$

풀이방향: 이 장치의 등가흔들이(하나의 줄에 매달린 구)의 길이는 $l\sin\alpha$

4. 1) $\frac{4}{9}(b_6+b_5+b_4-b_3-b_2-b_1)f_0^2$

2) D

3) $y = A\sin\left(2\pi f_o\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)$

5. 3)

풀이방향: 파동의 중첩은 파동에 참가하는 질점들의 변위, 속도, 가속도 등 벡토르의 합성이다. 먼저 두 파동이 P, Q, S위치에서의 진동상태를 판단하고 다음 벡토르합성을 진행한다.

6. **풀이방향:** 질점 M의 진동방향에 기초하며 파의 전파방향이 왼쪽이라는것을 확정하고 다음 문제에서 주어진 파의 속도, 시간에 기초하여 파동이 전파된 거리를 구하고 나아가서 t=0, 5s일 때의 파형의 그라프를 그리면 그림 2-7-1과 같다.

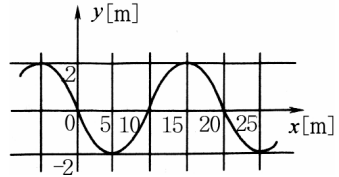



그림 2-7-1

7. 1) 진폭 A=0.2m, 파장 $\lambda=8$m

2) (t_2-t_1)가 한주기보다 작을 때 오른쪽으로 전파된다면 전파거리는 그림에서 2m라는것을 알수 있다. 이로부터 속도가

$$v_{오} = \frac{2}{0.005}\text{m/s} = 400\text{m/s}$$

인 파동이 왼쪽으로 전파된다면 그림으로부터 6m라는것을 알수 있다. 이로부터

$$v_{왼} = \frac{6}{0.005}\text{m/s} = 1\ 200\text{m/s}$$

3) 파동의 전파거리는 6 000m/s×0.005s=30m 로서 3개의 파장보다 6m 더 길다. 그림에서 알수 있는것처럼 파동은 왼쪽으로 전파된다.

8. 문제에서 서술한데 기초하여 진동자와 가림막은 모두 조화진동을 한다. 가림막의 진동방정식은 $x_1 = A\cos\omega t$ (진동을 시작한 순간을 t=0, 이 시각 가림막은 변위가 최대인 점에 위치하고 있고 cos함수로 변위를 표시할 때 그의 처음자리각은 령이다.)로

표시하면 전동자는 가림막보다 시간 늦게 진동한다. 그의 진동 방정식은

$$x_2 = A\cos\omega_1(t-\Delta t)$$

진동자의 그림자가 가림막에 대하여 상대적으로 운동하는 운동 방정식은

$$x_{상} = -x_1 + x_2 = A\cos\omega t + A\cos\omega(t-\Delta t) =$$

$$= -2A\sin(\omega t - \frac{\omega\Delta t}{2})\sin\frac{-\omega\Delta t}{2} = 2A\sin\frac{\omega\Delta t}{2}\sin\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right)$$

이 식들로부터 그의 상대적인 운동도 역시 조화진동이라는것을 알수 있으며 그의 진폭은 $A_{상} = \left|2A\sin\frac{\omega\Delta t}{2}\right|$ 이다.

$A = 10\text{cm}, \quad A_{상} = 5\text{cm}$

$$\therefore \quad \sin\frac{\omega\Delta t}{2} = \pm\frac{l}{4}$$

1) 만일 $\sin\frac{\omega\Delta t}{2} = \frac{l}{4}$, $\frac{\omega\Delta t_l}{2} = k\pi + (-1)^k \arcsin\frac{l}{4}, k \in Z$ 이라면

$$\Delta t_1 = \frac{2}{\omega}[k\pi + (-1)^k \arcsin\frac{l}{4}] = k + (-1)^k \times 0.08\text{s}$$

2) 만일 $\sin\frac{\omega\Delta t_l}{2} = -\frac{l}{4}$ 이라면 우와 같이

$\Delta t_2 = k - (-1)^k \times 0.08\text{s}$

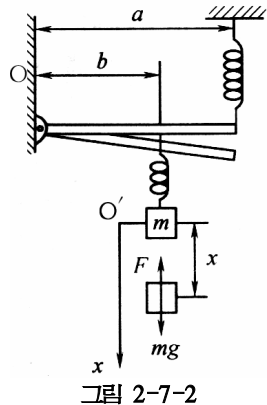
우의 두가지 경우를 종합하면

$$\Delta t = k \pm 0.08(\text{s})$$

문제에서는 $\Delta t > 0$ 일것을 요구하므로 문제의 답은

$$\Delta t = |k \pm 0.08|\text{s}, \quad k \in Z$$

9. 진동자가 정지되여있을 때 위치 O′를 자리표원점으로 하는 자리표계를 설정하자.(그림 2-7-2) 외부힘이 진동자를 x 만큼 변위시켰다고 하면 이때 막대기 OAB는 O주위로 각 θ 만큼 돌아간다. 만일 x 와 θ 가 최소값 즉 $x \to 0$, $\theta \to 0$ 이라면 이때 두 용수철의

그림 2-7-2

퇴힘은 각각 $F_1 = k_1 a\theta, \qquad F_2 = k_2(x - b\theta)$

막대기(혹은 보) 의 평형조건으로부터

$$F_1 a = F_2 b \ \rightarrow \ k_1 a\theta a = k_2(x - b\theta)b,$$

$$\therefore \ \theta = \frac{k_2 bx}{k_1 a^2 + k_2 b^2}$$

가속도를 a_m 이라고 하면

$$F_2 = -mg = k_2(x - b\theta) = ma_m$$

θ 를 넣으면

$$a_m = -\frac{k_1 k_2 a^2}{m(k_1 a^2 + k_2 b^2)} x$$

$$k' = \frac{k_1 k_2 a^2}{k_1 a^2 + k_2 b^2}, \qquad a_m = -\frac{k'}{m} x$$

진동자는 조화진동을 하며 그 주기는

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m(k_1 a^2 + k_2 b^2)}{k_1 k_2 a^2}}$$

10. 흔들이의 주기공식으로부터 $T \propto \sqrt{\frac{l}{g}}$ 임을 알수 있다. 승강기의 가속도를 a, 추시계의 표준주기를 T_0 이라고 하면 승강기가 우로 가속운동할 때 추시계의 주기는

$$T_1 = T_0 \sqrt{\frac{g}{g + a}}$$

승강기가 아래로 가속운동할 때 추시계의 주기는

$$T_2 = T_0 \sqrt{\frac{g}{g - a}}$$

대칭성으로부터 승강기가속도가 우로 향해있는 시간과 가속도가 아래로 향해있는 시간이 같으며 그것을 t_0이라고 하면 추시계가 나타내는 시간은

$$t = \frac{t_0 T_0}{T_1} + \frac{t_0 T_0}{T_2} = t_0 \left(\sqrt{\frac{g + a}{g}} + \sqrt{\frac{g - a}{g}} \right) = t_0 \sqrt{2 + 2\sqrt{1 - \frac{a^2}{g^2}}} < 2t_0$$

이것은 추시계가 나타내는 시간이 실제의 시간보다 작으며 승강기운전공은 늦게 퇴근하게 된다는것을 보여준다.

11. 수학흔들이가 작은 흔들이를 거치는 과정에 최대흔들이각을 θ 라고 하자. 력학적에네르기보존법칙으로부터 연추가 맨 아래점을 지날 때의 속도가 제일 크며 그 속도는

$$v_0 = \sqrt{2gl(1-\cos\theta)} = 2\sqrt{gl}\cdot\sin\frac{\theta}{2}$$

흔들이각이 작은 경우

$$\sin\frac{\theta}{2} \approx \frac{A}{2l}$$

여기서 A는 진폭이다. 그러므로

$$v_0 = A\sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{2\pi A}{T},\ T = \frac{2\pi A}{v_0}$$

진주가 달려있는 수학흔들이가 흔들거리는 과정에 진주는 항상 동일한 수평선에 놓여있게 되므로 연추가 맨 아래점을 통과할 때의 속도는 v, 진주의 속도는 $v/2$, 계의 력학적에네르기는 보존되므로

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{v}{2}\right)^2 = mgl(1-\cos\theta)\ ,$$

$$v = 2\sqrt{\frac{2gl(1-\cos\theta)}{5}} = \frac{2v_0}{\sqrt{5}}$$

$$T' = \frac{2\pi A}{v} = \frac{\pi A\sqrt{5}}{v_0} = \frac{\sqrt{5}}{2}T,$$

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ 이므로

$$T' = \pi\sqrt{\frac{5l}{g}}$$

12. 그림 2-7-3에서 보여주듯이 1과 2층이 접하는 경계에서 굴절법칙에 의해

$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} = \frac{2v_1}{v_1}$$

2와 3층이 접하는 경계에서

$$\frac{\sin\theta_3}{\sin\theta_2} = \frac{3v_1}{2v_1}$$

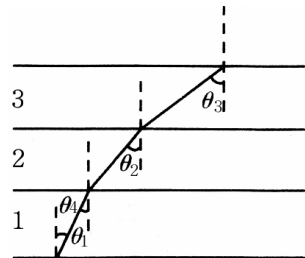



그림 2-7-3

그러면 n-1과 n층이 접하는 경계에서는

$$\frac{\sin\theta_n}{\sin\theta_{n-1}}=\frac{nv_1}{(n-1)v_1}$$

즉

$$\sin\theta_n=\frac{n}{n-1}\sin\theta_{n-1}=\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n-2}\ \cdots\ \frac{2}{1}\sin\theta_1$$

그러므로 $\sin\theta_n=n\sin\theta_1$ 이다.

소리파가 매 층에서 전파될 때 수평방향의 변위를 Δx_i 로 표시하자. 여기서 $i=1, 2, \cdots, n$

i번째 층에서는 $\sin\theta_i=\dfrac{\Delta x_i}{\sqrt{\Delta x_i^2+d^2}}$

이 성립하고 $\sin\theta_n=n\sin\theta_1$와 련립하면 $\Delta x_i=\dfrac{i^2d^2\sin^2\theta}{1-i^2\sin^2\theta_1}$

i번째 층에서 $\Delta x_i\to 0$일때 즉 이 위치에서 전반사가 발생할 때 소리파는 땅면방향으로 전파된다. 이때

$$1-i^2\sin\theta_1=0\,,\quad i=\frac{1}{\sin\theta_1}$$

이 대응된다. $\theta_1=30^\circ$ 이므로 $i=2$ 이다.

웃식으로부터 알수 있는것처럼 2와 3층의 경계면에서 소리파는 전반사되며 대칭성으로부터 소리파가 땅면의 B점에 전파될 때 A와 B사이의 거리는

$$L=2(\Delta x_1+\Delta x_2)=2d(\tan 30^\circ+\tan 60^\circ)=\frac{8\sqrt{3}}{3}d$$

13. 먼저 굳은 강철틀을 연구대상으로 하자.(그림 2-7-4) 이 틀이 정지상태에 있을 때 틀에 작용하는 매개 힘의 회전축 C에 대한 힘모멘트의 합은 임의의 순간에 모두 령이다. 어떠한 순간에 다람쥐가 AB의 중심점 O로부터 x 만큼 떨어졌다고 할 때 다람쥐가 드림선방향에서 이 틀에 대한 작용힘은 다람쥐가 받는 중력 mg와 같다. 여기서 m은 다람쥐의 질량이다. 이 중력의 회전축 C에 대한 힘모멘트의 크기는 mgx이고 방향은 시계바늘방향이다. 틀이 평형상태에 놓이도록 하자면 다람쥐가

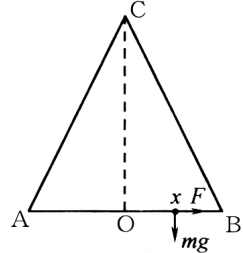



그림 2-7-4

반드시 틀 AB에 수평방향의 힘 F를 더 가해야 하며 이 힘의 회전축 C에 대한 힘모멘트와 드림선방향의 중력이 발생한 힘모멘트의 크기는 같고 방향이 반대여야 한다. 즉 다람쥐의 위치를 자리표의 정의 x점으로 보고 F가 x의 정방향을 향한다면 자리표가 부수일 때 F는 x의 부방향을 향한다. 이것을 그림에 표시하였다. 또한 평형조건

$$mgx = Fl\sin 60° = \frac{\sqrt{3}Fl}{2}$$

을 만족한다. 식에서 l은 틀의 길이이다. 그러므로

$$F = \frac{2mgx}{\sqrt{3}}l$$

쥐가 수평방향에서 틀 AB에 주는 힘은 쥐가 차지한 위치가 변하는데 따라 조절하여 $F = \frac{2mgx}{\sqrt{3}l}$이 만족되여야 한다. 다시 다람쥐를 연구대상으로 하여 다람쥐가 운동과정에 드림선방향에서 받는 합성힘은 령이고 수평방향에서 틀 AB로부터 받는 힘은 F'이다. 뉴톤의 제3법칙으로부터 이 힘은 F의 반작용힘이므로

$$F' = -\frac{2mgx}{\sqrt{3}l}$$

다람쥐는 수평방향에서 받는 힘 F'의 작용하에서 O점을 평형자리로 하여 조화진동을 하며 그 진동주기는

$$F = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

이 식에서

$$k = \frac{2mg}{\sqrt{3}l}$$

수값을 넣으면 $T = 2.64\text{s}$이다. 다람쥐가 틀의 두 끝점 A와 B로 이동했을 때 틀은 반대방향으로 운동하며 조화진동규칙에 따라 속도는 령이다. 그러므로 다람쥐가 조화진동을 하는 진폭은

$$A \le l/2 = 1\text{m}$$

이다.(진폭이 1m이면 다람쥐를 질점으로 본것과 대응한다.) 이상의 내용으로부터 다람쥐의 운동자리길 AB에서의 운동은 AB의 중심점 O를 평형자리로 하고 진폭은 $A<1\text{m}$이며 주기가 2.64s인 조화진동이다.

14. 승강기가 $a=0$일 때

$$k\Delta L = mg,\ k=\frac{mg}{\Delta L}$$

이므로 승강기가 $a_1 = 0.5g$ 로써 내려갈 때 중력가속도 $g_1 = g-0.5g = 0.5g$ 에 해당되며 방향도 아래로 향한다.(그림 2-7-5) 이때 용수철의 연장길이는 $\Delta L_1 = \frac{0.5mg}{k} = 0.5\Delta L$

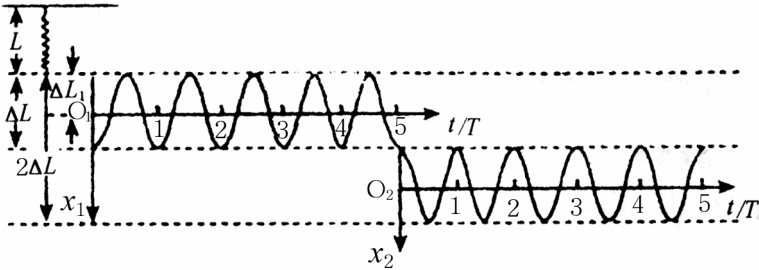



그림 2-7-5

이때 진동의 평형자리는 용수철이 본래 길이로 놓여있을 때의 $\Delta L_1 = 0.5L$ 인 자리이고 이 점이 원점 $O_1 x_1$ 로 된다. 아래방향을 자리표의 정의 방향으로 보면 진동을 시작할 때 처음자리가 $x_{01} = 0.5L$, 처음속도 v_{01}=0이다. 이것은 진동하는 물체가 최대변위자리에 놓여있다는것을 말해주며 진폭 A=0.5L , 진동주기는

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta L}{g}} = \frac{\pi}{5}\text{s}$$

그러므로 $t=\pi=5T$ 이다. 물체가 진동을 5번 한 후 최저점에 있게 되며 이때 속도는 0이다. 승강기가 $a_2 = -0.5g$ 로 내려갈 때 중력가속도 $g_2 = 1.5g$ 에 해당되며 방향은 아래이다. 이때 용수철의 연장길이는 $\Delta L_2 = 1.5\Delta l$ 이다. 이때 진동의 평형자리는 용수철의 본래 자리로부터 아래로 $1.5\Delta L$ 인 자리이고 이 점이 두번째 진동의 자리표인 점 O2이고 아래방향을 자리표의 정방향으로 보면 이때 진동이 시작될 때의 처음자리는 $x_{02} = 0.5\Delta L,\ \ v_{02} = 0$ 이고 진폭은 A=0.5ΔL, 주기는

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta L}{g}} = \frac{\pi}{5}s$$

승강기가 정지상태에서 0.5g아래방향의 가속도를 받고 어떠한 속도에 이르렀을 때 0.5g로 웃쪽으로 향하는 가속도는 승강기의 속도를 령으로 감소시킨다. 운동의 대칭성으로부터 승강기가 감속하는데 걸리는 시간도 π이다. 그러므로 두번째 진동도 다섯번의 진동을 거쳐 마지막에는 처음진동자리에 멎게 되며 그의 진동그라프는 그림 2-7-5와 같다.

15. 1) 나무막대기의 자름면을 S로 표시하자. 정지상태로부터 나무막대기의 아래끝이 두 액체의 경계면에 도달했을 때 이 과정에 나무막대기는 아래방향으로 향하는 중력 $\frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)LSg$ 와 웃쪽으로 향하는 뜰힘 $\rho_1 LSg$ 를 받는다. 뉴톤의 제2법칙으로부터 내려가는 가속도는

$$a_1 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2}$$

t_1로써 필요한 시간을 표시하면

$$\frac{3}{4}L = \frac{1}{2}a_1 t_1^2$$

이것을 풀면 $t_1 = \sqrt{\frac{3L(\rho_1 + \rho_2)}{2(\rho_2 - \rho_1)g}}$ 을 얻는다.

2) 나무막대기의 아래끝이 아래쪽의 액체로 들어가기 시작한 후 l'로 나무토막이 웃쪽의 액체에 잠긴 부분의 길이를 표시하면 이때 나무막대기가 받는 중력은 변하지 않으며 여전히 아래방향으로 향하는 중력 $\frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)LSg$ 을 받는다. 그러나 뜰힘은 $\rho_1 L'Sg + \rho_2(L - L')Sg$ 로 변한다. $L = L'$ 일 때 뜰힘은 중력에 비해 작다. $L' = 0$일 때 뜰힘은 중력보다 크며 합력이 0이 되는 평형자리가 있다는것을 알수 있다. L_0'로 이 평형자리에 이르렀을 때 웃쪽 액체속에 놓여있는 나무막대기의 길이를 나타낸다면 이때

$$\frac{1}{2}(\rho_1+\rho_2)LSg=\rho_1 L_0' Sg+\rho_2(L-L_0')Sg$$

여기서 $L_0'=L/2$ 를 얻는다. 즉 막대기의 중심점이 두 액체 경계선우에 놓일 때 나무막대기는 평형상태에 있게 되며 자리표계를 그 원점이 경계면우에 놓이도록 취하고 수직방향이 z축이면서 웃쪽이 정의 방향이라고 하면 막대기중심점의 자리표 $z=0$ 일 때 막대기가 받는 합력은 0이다. 중심점자리표가 z일 때 받는 합력은

$$-\frac{1}{2}(\rho_1+\rho_2)LSg+\left[\rho_1(\frac{1}{2}l+z)Sg+\rho_2(\frac{1}{2}L-z)Sg\right]=$$

$$=-(\rho_1-\rho_2)LSgz=-kz$$

식에서 $K=(\rho_2-\rho_1)Sg$ 이다. 이때 막대기의 운동방정식은

$$-kz=\frac{1}{2}(\rho_1+\rho_2)LSa_Z$$

여기서 a_z 는 z방향의 가속도이다. 즉

$$a_Z=-2\frac{(\rho_2-\rho_1)}{(\rho_1+\rho_2)}Lgz=-\omega^2 z \;\rightarrow\; \omega^2=2\frac{(\rho_2-\rho_1)}{(\rho_1+\rho_2)L}g$$

이로부터 조화진동이라는것을 알수 있고 그 주기는

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{L(\rho_1+\rho_2)}{2(\rho_2-\rho_1)g}}$$

두가지 액체속에서 운동하는데 걸리는 시간을 구하기 위해서 먼저 진동의 진폭 A를 구하자. 막대기의 아래끝이 아래쪽의 액체속으로 들어갔을 때 그 속도는 $v=a_1t_1$ 이다. 력학적에네르기보존법칙으로부터

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\rho_1+\rho_2)LS\right]v^2+\frac{1}{2}kZ^2=\frac{1}{2}kA^2$$

식에서 $z=L/2$ 은 이때 막대기중심의 자리표원점으로부터의 거리이다. 우의 매 식으로부터 A=L이다. 이로부터 막대기의 아래끝이 아래쪽의 액체에 들어가기 시작해서 막대기중심이 자리표원점에 도달하기까지 경과한 거리는 진폭의 절반이라는것을 알수 있다.(그림 2-7-6에 표시하였다.) 대응하는 θ 는 30°, 시간은 $T/12$이다. 그러므로 막대기와 아래끝이 아

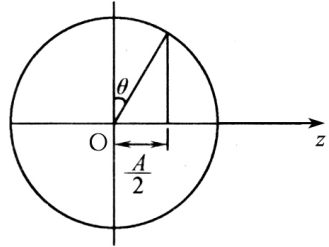
래쪽의 액체속에 들어가기 시작하며 웃끝도 아래쪽의 액체속에 들어가는데 걸리는 시간 즉 막대기중심이 $z=L/2$로부터 $z=-L/2$까지 이동하는데 걸리는 시간은

$$t_2 = 2\frac{T}{12} = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{L(\rho_1+\rho_2)}{2(\rho_2-\rho_1)g}}$$

그림 2-7-6

3) 막대기전체가 아래쪽의 액체에 잠긴 때로부터 받는 힘의 분석은 1)과 같으며 단지 이때 뜰힘이 중력보다 크다는것이다. 그러므로 등감속운동을 하며 가속도는 a_1와 같고 2)의 과정은 1)의 과정과 반대로 되며 시간은 $t_3 = t_1$이다.

4) 전체 시간은

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = \frac{6\sqrt{6}+\sqrt{2}\pi}{6}\sqrt{\frac{L(\rho_1+\rho_2)}{(\rho_2-\rho_1)g}}$$

이다.

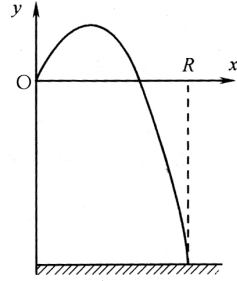
제8장. 력학종합문제

1. 강물이(강물의 속도는 u) 자리표계안에서 흐르는것으로 해놓고 떼목의 운동을 연구하자. 이 자리표계에서 떼목은 처음속도 v(그림과 같이)를 가지고 직선운동을 하는데 동시에 물의 저항작용을 받으므로 속도는 v'로 감소한다.(만일 물의 저항을 받지 않는다면 T만 한 시간이 지나면 떼목은 자리표가 $x=uT$, $y=vT$인 C점에 있게 된다.(그림 2-8-1에 표시했다.) t시간동안에 떼목이 강기슭에 대하여 상대적으로 옮겨간 변위는 물에 대한 상대적인 변위 $S_{상}=v'T$와 물흐름의 변위 $S_{물}=uT$의 벡토르합이다.(그림을 볼것) $2T$만 한 시간이 지나서 물흐름의 변위는 2배로 늘어나고 x축을 따라서 O점에서 떨

그림 2-8-1

어진 거리를 $2S$로 표시하면 x축의 $2S_{물}$인 점을 지나며 $S_{상}$에 평행인 직선과 떼목의 자리길은 ×점에서 사귄다. $2T$만 한 시간이 지나서 떼목은 바로 이 점에 이르게 된다. 우의 작도법을 써서 $3T$, $4T$인 경우에 떼목이 가닿는 거리를 구할수 있다.

그림 2-8-2

2. 먼저 천정이 없다고 가정하자. 이 경우에 쪼각들이 땅바닥에 떨어진 최대반경을 구하자. 자리표계를 설정하고 전등의 위치를 원점(그림 8-2에 표시)으로 하자. 쪼각들은 수평방향과 각 α를 이루면서 날아가다가 t만 한 시간이 지나서 땅바닥우에 떨어진다.

$$-l_2 = vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2, \qquad R = vt\cos\alpha$$

각의 선택에 따라 R값을 가장 크게 할수 있다. 이를 위하여 우의 식을 변경시켜

$$\frac{1}{2}gt - \frac{l_2}{t} = v\sin\alpha, \qquad \frac{R}{t} = v\cos\alpha$$

이로부터 R와 관련한 안같기식은

$$R^2 = (v^2 + gl_2)t^2 - \frac{g^2 + t^4}{4} - l_2^2 = -\left(\frac{gt^2}{2} - \frac{v^2 + gl_2}{g}\right)^2 \le \left(\frac{v^2 + gl_2}{g}\right)^2 - l_2^2$$

이로부터 $R_{최} = \frac{v}{g}\sqrt{v^2 + gl_2}$

쪼각들이 이만 한 거리를 비행하는데 걸리는 시간은

$$t' = \frac{l}{g}\sqrt{2(v^2 + gl_2)}$$

수평방향과 이루는 각은 아래식으로부터 얻는다.

$$\cos\alpha' = \frac{R_{최}}{vt'} = \sqrt{\frac{v^2 + 2gl_2}{2(v^2 + gl_2)}}$$

쪼각들이 운동한 자리길에서 전등웃쪽의 높이 h'는 아래식으로부터 얻는다.

$$h'=\frac{(v\sin\alpha')^2}{2g}=\frac{v^2}{2g}(1-\cos^2\alpha)=\frac{v^4}{4g(v^2+gl_2)}$$

천정이 있다고 보자. 만일 $l_1 \ge h'$ 이면

$$R_{최}=\frac{v}{g}\sqrt{v^2+gl_2}$$

만일 $l_1 < h'$ 이라면 즉

$$l_1<\frac{v^4}{4g(v^2+gl_2)}$$

인 경우에 쪼각들의 운동자리길의 전등우에서의 최대높이는 l_1 (자리길과 천정이 서로 접한다.)이여야 쪼각들이 땅바닥우에 떨어지는 반경이 가장 크다. 이러한 결론을 증명하기 위하여 천정에 의해 튀여나는 쪼각들의 운동을 연구하면 된다. 쪼각들이 튀여난 후의 자리길을 《접선》자리길과 대비하면 《원형》에 더 다가간다. 어떤 때를 막론하고 쪼각들의 운동자리길은 《접선》자리길과 사귀지 않는다. 이것은 천정과 접하는 쪼각들이 천정에 맞고 튀여나는 쪼각들보다 더 멀리 날아간다는것을 의미한다. 이로부터

$$l_1<\frac{v^4}{4g(v^2+gl_2)}$$

이면

$$R_{최}=\frac{1}{g}\sqrt{v^2+gl_2}\left[\sqrt{2gl_1}+\sqrt{2g(l_1+l_2)}\right]$$

이다. 이 답은 방정식 $\frac{(v\sin\alpha)^2}{2g}=l_1$ 인 경우에 얻은것이다.

3. 1) 비행선이 A점에서 B점까지 가는 경우 에네르기보존의 법칙으로부터

$$\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{GMM_{달}}{R_{달}+h}=\frac{1}{2}mv_A^2-\frac{GMM_{달}}{R_{달}}$$

케플레르의 제2법칙에 의하면 속도벡토르는 같은 시간동안에 같은 면적을 지난다. 시간간격 Δt 를 짧게 하면 이 면적은 근사면적으로 $v\Delta t$ 를 밑면으로 하고 R를 높이로 하는 3

각형의 면적이다.

$$\frac{1}{2}(R_{달}+h)v_{\mathrm{A}}\Delta t=\frac{1}{2}R_{달}v_{\mathrm{B}}\Delta t$$

이 관계식으로부터 발동기를 끈 다음 비행선의 A점에서의 속도는

$$v_A=\sqrt{\frac{2g_{달}R_{달}^3}{(R_{달}+h)(2R_{달}+h)}}$$

발동기를 끄기 전에 비행선은 원자리길을 그리며 운동한다. 그의 속도는

$$v_0=\sqrt{\frac{g_{달}R_{달}^2}{R_{달}+h}}$$

발동기는 비행선의 속도를 감소시키는데

$$\Delta v=v_0-v_A=\sqrt{\frac{g_{달}R_{달}^2}{R_{달}+h}}\left(1-\sqrt{\frac{2R_{달}}{2R_{달}+h}}\right)\approx\frac{v_0h}{4R_{달}}=24\mathrm{m/s}$$

발동기의 동작시간이 아주 짧으므로 운동량보존법칙을 리용하면

$$Mv_0=(M-m)(v_0-\Delta v)+m(u+v_0)$$

식에서 m은 분출한 연료의 질량이다. 이 식을 변형하면

$$m=\frac{M\Delta v}{u+\Delta v}\approx\frac{M\Delta v}{v}=29\mathrm{kg}$$

2) 이 경우의 답은 1)의 경우와 비슷한데 차이는 벡트르 Δv의 방향이 v_0의 방향에 수직이라는것이다.

$$\Delta v=\sqrt{v_A^2-v_0^2}$$

즉

$$\Delta v=h\sqrt{\frac{R_{달}}{R_{달}+h}}=97\mathrm{m/s}$$

따라서 $m=\frac{M\Delta v}{v}=116\mathrm{kg}$

4. 1) 구면파의 일반식은 $y=\frac{A}{r}\cos\omega\left(t-\frac{r}{v}\right)$

식에서 A는 파원으로부터 단위길이만큼 떨어진 곳의 진폭, r

는 파원으로부터의 거리, v는 파의 속도이다. 일반식으로부터 r_1만큼 떨어진 곳에서의 진동은

$$y_1 = \frac{A}{r}\cos\omega\left(t - \frac{r_1}{v}\right) = \frac{A}{10}\cos\omega\left(t - \frac{10}{v}\right)$$

문제에서 주어진 $y_1 = 2\cos 4\pi\left(t - \frac{1}{8}\right)$식과 비교하면

$$A = 20\text{m},\quad \omega = 4\pi\text{rad/s},\quad v = 80\text{m/s}$$

파장은 $\lambda = \dfrac{2\pi u}{\omega} = 40\text{m}$

2) 문제에서 준 조건과 수값을 넣으면 r_1=10m인 곳의 진폭은 A_1=2m이다. R=25m인 곳의 진폭은 A_2이다. 즉

$$A_2 = \frac{A_1 r_1}{r_2} = 0.8\text{m}$$

r_2인 곳의 자리각은

$$4\pi\left(t - \frac{1}{8}\right) - \frac{2\pi(r_2 - r_1)}{\lambda} = 4\pi\left(t - \frac{5}{16}\right)$$

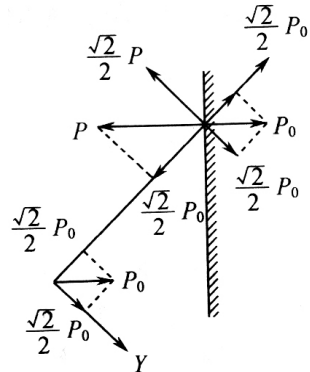
그러므로 r_2인 곳의 변위는 $y_2 = 0.8\cos 4\pi\left(t - \frac{5}{16}\right)$

5. 웃쪽의 구와 벽이 충돌할 때 벽의 힘덩이 I의 작용을 받는다. 결과 《아령》전체는 힘덩이 I와 맞먹는 운동량 P를 받으며 그 방향은 벽에 수직이다.(벽은 미끈하다.)

그림 2-8-3

운동량 P의 막대기방향의 성분은 두 개 구에 의해서 나뉘여지는데 막대기에 수직인 방향의 성분은 모두 웃쪽의 구에 작용한다.(그림 2-8-3에 표시) 충돌후에 웃쪽구의 운동량 P_1는 운동량정의에 의해 x축성분

$$P_{1x} = \left(\frac{P}{2} - P_0\right)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

이고 y축성분

$$P_{1y}=(P-P_0)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

그러므로 운동량

$$p_1^2=(\frac{P}{2}-P_0)^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+(P-P_0)^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

충돌후 아래쪽 구의 운동량 P_2의 x축성분은

$P_{2x}=\left(\frac{P}{2}-P_0\right)\frac{\sqrt{2}}{2}$이고 y축성분은 $P_{2y}=\frac{\sqrt{2}}{2}P_0$

그러므로 $P_2^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}P\right)^2+\left(\frac{P}{2}-P_0\right)^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

아래에서 P의 크기를 구하자. 구와 벽사이에 튐성충돌이 발생

하므로 력학적에네르기보존법칙에 의해 $E_{k0}=E_{k1}+E_{k2}$

즉 $2\frac{P_0^2}{2m}=\frac{l}{2m}\left[\left(\frac{P}{2}-P_0\right)^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+(P-P_0)^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]+$

$$+\frac{I}{2m}\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}p_0\right)^2+\left(\frac{p}{2}-p_0\right)^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]$$

이로부터 $P=\frac{8}{3}P_0$

운동량정의에 의해《아령》이 벽에서 떨어질 때 운동량 P'를 가진다.

$$P'=P-2P_0=\frac{2}{3}P_0$$

이때 《아령》의 질량중심은 속도

$v'=\frac{1}{3}v_0$ 으로 운동하고 두 구는 속도 $v=\frac{2\sqrt{2}}{3}v_0$ 으로 질점주위로 원운동을 한다.

6. 매 시각마다 작은 구의 회전축은 선과 원기둥체의 접점을 지난다. 이것은 선의 장력이 구의 속도에 수직이라는것을 말해준다. 이로부터 장력은 일을 하지 않으며 구의 운동에네르기는 변하지 않는다는것을 알수 있다. 그의 속도 v의 크기도 변하지 않는다.

l과 t사이의 관계를 알기 위해 t순간에 풀어놓은 선을 N개의 토막(N은 아주 크다.)들로 나눈다고 가상할 때 매 작은 토막의 길이는

$\Delta l = \dfrac{l}{N}$ 이다. n번째 작은 토막을 풀어놓는데 걸리는 시간을 Δt_n 이라고 하면 이 시간동안에 선끝이 이동한 거리는 $v\Delta t_n$, 그리고 선자체의 회전각도는 $\Delta\varphi_n = \dfrac{v\Delta t_n}{n\Delta\ell}$ (그림 2-8-4에 표시)선과 원기둥의 접점으로부터 그어진 반경도 같은 각만큼 돌아간다. 즉

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta l}{r}$$

그림 2-8-4

이로부터 $\Delta t_n = n \cdot \dfrac{\Delta l^2}{vr}$

그러므로

$$t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \cdots + \Delta t_n =$$

$$= \frac{\Delta l^2}{vr} + \frac{2\Delta l^2}{vr} + \cdots + \frac{N\Delta l^2}{vr} = \frac{\Delta l^2}{vr} \cdot \frac{N(N+1)}{2}$$

$N \to \infty$ 이면 $t = \dfrac{N^2 \Delta l^2}{2vr} = \dfrac{l^2}{2vr}$

$\therefore\ l = \sqrt{2\text{urt}}$

7. 그릇면이 미끄럽고 마찰이 없으므로 막대기 끝에서 그릇이 받게 되는 맞선힘 N_1는 반경 BO방향을 향하게 된다. 막대기가 C점에서 받는 맞선힘 N_2은 막대기에 수직이면서 BO의 연장선과 A점에서 사귄다. 그런데 ∠BCA가 직각이므로 A점은 같은 원둘레우에 있는 점으로 된다. 한편 막대기는 중력 G의 작용을 받는다. 막대기가 평형일 때 힘 N_1, N_2의 A점에 대한 힘모멘트는 0이여야 한다. 그것은 중력 G의 A점에 대한 힘모멘트도 0이라는것이다. 즉 중력의 작용선이 A점을 지나야 한다는것을 말해준다.(그림 2-8-5에 표시)

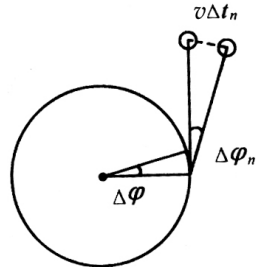
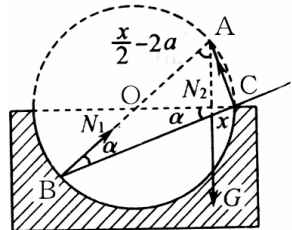



그림 2-8-5

이제 각 α와 관련한 삼각함수방정식들을 보기로 하자. 직3각형 ABC에서 활줄은 $BC = 2R\cos\alpha$ 이다.
한편 막대기에 작용하는 중력의 작용점이 막대기의 중심이라는 것을 고려하면 $x = 2R\cos\alpha - L$ 이다. 또한 반경 OC가 중력 G의 작용선에 의해 두 부분으로 나뉘여졌다고 볼수 있으므로

$$R = R\sin(\frac{\pi}{2} - 2\alpha) + x\cos\alpha$$

로 된다. 우의 두 식으로부터 $4R\cos^2\alpha - L\cos\alpha - 2R = 0$ 이다. 그런데 각 α가 $\pi/2$보다 작으므로 우의 방정식에서 정수풀이만이 물리적의미를 가지며 따라서 $\cos\alpha = \frac{1}{8R}(L + \sqrt{L^2 + 32R^2})$ 이다.

$\cos\alpha$가 1을 넘을수 없으므로 $L + \sqrt{L_2 + 32R^2} \le 8R$

이로부터 $L \le 2R$ 이다. 이러한 조건의 물리적의미는 아주 명백하다. 만일 막대기의 길이가 그릇 직경의 2배를 넘으면 막대기의 중력중심은 그릇의 밖에 놓이게 되므로 막대기는 그릇밖으로 넘어진다. 만일 $L=2R$이면 막대기는 수평으로 그릇의 C점에 걸려있게 된다.
만일 막대기가 매우 짧으면 그릇안으로 미끄러져 들어가게 되는데 막대기의 웃끌이 그릇의 변두리($x = L$)에 놓이게 된다. 막대기의 최소길이가 $2R\cos\alpha_1 = 2L$ 로 되여야 한다. 한편 극한각 α_1는 우에서 준 조건 $\cos\alpha = \frac{1}{8R}(L + \sqrt{L^2 + 32R^2})$ 도 만족시켜야 한다.

이로부터 막대기의 최소길이는 $L = \frac{\sqrt{6}}{3}R$ 로 된다.

최소길이와 대응하는 극한각 α_1는 $\cos\alpha_1 = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 을 만족한다.

그러므로 막대기의 길이가 조건 $\frac{\sqrt{6}}{3}R < L < 2R$ 를 만족한다면 평형이 가능하며 각 α는 공식 $\cos\alpha = \frac{1}{8R}(L + \sqrt{L^2 + 32R^2})$ 에 의해 결정된다. 좀 더 고찰을 심화시켜보면 평형이 파괴되

여 막대기끝이 C점에 걸쳐지지 않을 때에는 이 막대기가 다시 평형상태로 되돌아가게 된다는것을 알수 있을것이다. 이런 평형상태가 바로 안정한 평형상태이다. 만일 막대기의 길이가 그릇의 직경보다 작다면($L<R$) 막대기가 그릇안에서 수평을 유지하게 되는 또하나의 안정한 평형상태가 나타나게 된다는것을 쉽게 알수 있다.

8. 1) 문제에 의하면 3개의 물체는 상대적으로 정지되여있고 동일한 가속도로 오른쪽으로 운동한다. 먼저 경계면 A에서의 마찰력을 구할수 있다.

$$f_{\mathrm{A}}=m_1 a$$

2에 대해 힘분석을 진행하자.(그림 2-8-6에 표시) 뉴톤의 제2법칙에 의해 수평방향에서는

그림 2-8-6

$$f_{\mathrm{B}}\cos\theta-f_{\mathrm{A}}-N_2\sin\theta=m_2 a$$

이고 수직방향에서는

$$f_{\mathrm{B}}\sin\theta+N_2\cos\theta=(m_1+m_2)g$$

이다. 이로부터

$$f_{\mathrm{B}}=(m_1+m_2)(a\cos\theta+g\sin\theta)$$

$$N_2=(m_1+m_2)(g\cos\theta-a\sin\theta)$$

이다. 그러므로

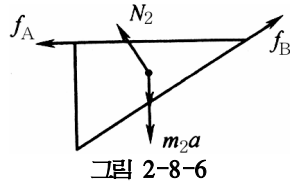
$$f_{\mathrm{B}최}=\mu_B N_2=\mu_B(m_1+m_2)(g\cos\theta-a\sin\theta)$$

$$\frac{f_{\mathrm{A}}}{f_{\mathrm{A}최}}=\frac{m_1 a}{\mu_{\mathrm{A}} m_1 g}-\frac{a}{\mu_{\mathrm{A}} g}$$

$$\frac{f_{\mathrm{B}}}{f_{\mathrm{A}최}}=\frac{a\cos\theta+g\sin\theta}{\mu_{\mathrm{A}}(g\cos\theta-a\sin\theta)}$$

2) 1에 대해서 볼 때 1은 최대가속도 $a_{최}$를 가지며 그것은 최대정지마찰력으로부터 결정된다. 뉴톤의 제2법칙에 의해

$$f_{1최}=\mu_{\mathrm{A}} m_1 g=m_1 a$$

그러므로 $a_{1최}=\mu_{\mathrm{A}} g$ 이다. 이로부터 $a>a_{1최}$ 인 경우에 경계면 A는 미끄러진다. 2에 대하여 볼 때 그것은 최대가속도를 가지며 그것은 최대정지마찰력에 대응된다.

이때 $f_{B최} = \mu_B N_2$

우의 식에 넣으면

$$\mu_B N_2 \sin\theta + N_2 \cos\theta = (m_1 + m_2)g$$

$$\mu_B N_2 \cos\theta - m_1 a_{2최} - N_{2최} \sin\theta = m_2 a_{2최}$$

이다. 정리하면

$$N_2(\mu_B \sin\theta + \cos\theta) = (m_1 + m_2)g$$

$$N_2(\mu_B \cos\theta - \sin\theta) = (m_1 + m_2)a_{2최}$$

이로부터

$$a_{2최} = \frac{\mu_B \cos\theta - \sin\theta}{\mu_B \sin\theta + \cos\theta} g$$

를 얻는다.

그러므로 $a \geq \frac{\mu_B \cos\theta - \sin\theta}{\mu_B \sin\theta + \cos\theta} g$ 인 경우 경계면 B는 미끄러진다.

$a_{1최}$ 와 $a_{2최}$ 를 비교하자.

$a_{1최} < a_{2최}$ 이면 즉 $\mu_A < \frac{\mu_B \cos\theta - \sin\theta}{\mu_B \sin\theta + \cos\theta}$

이면 경계면 A가 먼저 미끄러지고

$a_{1최} > a_{2최}$ 이면 즉 $\mu_A > \frac{\mu_B \cos\theta - \sin\theta}{\mu_B \sin\theta + \cos\theta}$

이면 경계면 B가 먼저 미끄러진다.

3) $-\theta$ 대신에 θ 를 넣으면 $\mu_A < \frac{\mu_B \cos\theta + \sin\theta}{\mu_B \sin\theta - \cos\theta}$ 일 때 경계면 A가 먼저 움직인다.

4) $\mu_A = 0.5$ 와 $\mu_B = 0.8$ 을 우의 안같기식들에 갈아넣으면

$$0.5 < \frac{0.6\cos\theta - \sin\theta}{0.8\sin\theta + \cos\theta}$$

이로부터 최소경사각 θ 는 $\theta_{최} = 12.1°$ 이다. 이 각은 처음 마찰시킬 때의 각보다 크지 않다. 즉 3에 대해 힘을 가하지 않은 경우에 경계면 B는 이미 미끄러지기 시작한다. 그러므로 $\tan\theta \leq \mu_B = 0.8$ 이다. 이로부터 최대경사각 θ 의

값은 $\theta_{최}=38.7°$ 최종적으로 얻은 경사각 θ 는

$$12.1^0 \le \theta \le 38.7^0$$

9. 사람이 나무판의 한쪽 끝에서 다른쪽 끝으로 이동하는 과정에 먼저 나무판이 뒤로 운동하는 경우를 론의하자.(그림 2-8-7) 사람이 운동하기 시작해서 다른쪽 끝에 방금 도착하여 아직 멎어서지 않은 과정에 소비한 시간을 t로 표시하자. x_1 는 나무판이 뒤로 이동한 거리를 표시한다. f는 사람과 나무판사이의 마찰력, F는 땅면이 나무판에 주는 마찰력을 표시한다. a_1 와 a_2 은 각각 사람과 나무판의 가속도를 표시한다.

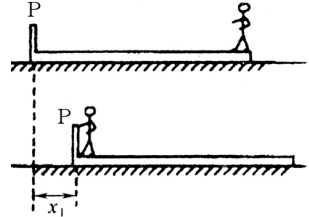



그림 2-8-7

그러면

$$f = ma_1, \quad L - x_1 = \frac{1}{2}a_1t^2, \quad f - F = Ma_2, \quad x_1 = \frac{1}{2}a_2t^2$$

우의 네 식을 풀어서

$$t = \sqrt{\frac{2LMm}{Mf + m(f - F)}}$$

를 얻는다. 사람과 나무판으로 이루어진 계에 대해서 사람이 나무판의 다른쪽끝에서 멈춰선 후 두 대상의 전체 운동량은 처음부터 이 시각까지 땅면의 마찰력 F의 힘덩이와 같다. 사람이 갑자기 멈춰선 짧은 시간토막은 무시한다. 그러면

$$Ft = (M + m)v$$

이다.

v는 사람이 나무판의 다른쪽끝에서 멈춰섰을 때 두 대상이 함께 운동하는 속도이다. 사람이 나무판의 다른쪽끝에서 멈춰선 후 두 대상이 함께 앞으로 이동한 거리를 x_2 이라고 하고 땅면의 미끄럼마찰력을 μ 라고 하면

$$\frac{1}{2}(M + m)v^2 = \mu(M + m)gx_2$$

나무판이 앞으로 이동한 거리는 $x = x_2 - x_1$

우의 매 식들로부터

$$x=\frac{1}{\mu g}\left(\frac{F}{M+m}\right)^2\left[\frac{LMm}{(M+m)(f-F)+MF}\right]-$$

$$-(f-F)\left[\frac{Lm}{Mf+(f-F)}\right]$$

웃식으로부터 알수 있는것처럼 나무판이 앞으로 이동한 거리 x를 가장 크게 하려면 $f=F$, $f-F_{최}=\mu(M+m)g$ 이다.

나무판이 앞으로 이동하는 거리가 최대로 되는 조건은 사람이 나무판에 주는 정지마찰력이 땅면이 나무판에 주는 미끄럼마찰력과 같게 되여야 한다. 이동한 최대거리는 $x_{최}=\frac{m}{M+m}L$

웃식으로부터 나무판이 뒤로 운동할 때 즉 $f\geq F$ 인 경우 $f=F$일 때가 극대값을 가지며 다시말하여 0～t사이에서 나무판이 움직이지기 직전에 극대값을 가진다. 나무판이 운동하지 않을 때 즉 $f<F$인 경우 $f<F$이므로 사람이 가지고있는 운동에네르기와 충돌후의 전체 운동에네르기는 모두 작아지며 앞으로 나간 거리 x도 작아진다. 즉 우에 서술한 $x_{최}$보다 작다.

제9장. 분자운동론, 열과 일, 고체와 액체의 성질, 물질의 상변화

1. 4)

풀이방향: 분자들사이의 호상작용에네르기는 분자들사이의 호상작용힘과 분자들사이의 거리에 의해 결정되는 량이다. 문제에서 제시한 A, B 두 분자들이 처음에는 멀리 떨어져있어 분자힘을 무시할수 있으므로 그들사이의 포텐샬에네르기도 령이다. (에네르기기준점을 여기에 놓는다.) A분자를 고정시키고 B분자를 A분자에 접근시켜 $r=r_0$ 까지 다가가게 하는 과정에 $r>r_0$ 일 때에는 분자힘이 끌힘으로 작용하며 따라서 분자힘이 정의 일을 수행하므로 분자들사이의 호상작용에네르기는 점점 더 작아지게 된다.(령보다 더 작아진다.) $r=r_0$ 일 때 호상작용에네르기는 최소로 된다. 이

위치로부터 B분자가 A분자쪽으로 더 접근하려 할 때에는 $r < r_0$ 으로 되면서 분자힘이 밀힘으로 되면서 그것이 부의 일을 수행하므로 호상작용에네르기가 커진다. 따라서 처음에는 분자힘이 B분자에 대해 정의 일을 수행하고 그 다음은 B분자가 분자힘을 극복하면서 일을 수행하므로 호상작용에네르기가 처음에는 작아지다가 그 다음은 커지게 된다.

2. 2)

풀이방향. 물체의 내부에네르기를 변화시키는데는 두가지 방법이 있는데 그 하나는 일을 수행하는 방법이고 다른 하나는 열량을 전달하는 방법이다. 이 두가지 방법은 동시에 실현될수도 있고 각기 실현될수도 있다. 따라서 물체의 내부에네르기가 변할 때 온도가 꼭 변해야 하는것은 아니다. 즉 1)은 틀린다. 물체가 외부계에 일을 수행하거나 외부계에서 물체에로 열량이 전달될 때 물체의 내부에네르기가 꼭 변해야 하는것은 아니다. 왜냐하면 물체가 외부계에 일을 수행함과 동시에 외부계로부터 물체에 열량이 전달된다거나 외부계에서 물체에 열량이 전달되면서 동시에 물체가 외부계에 일을 수행하는 경우에는 내부에네르기가 변하지 않게 할수도 있다.

3. 2)에 가깝다.

풀이방향. 결정체에서 매개의 이온마다 할당되는 평균체적을 구하여라. 문제에서 제시한 그림을 보면 가장 가까운 두개의 나트리움이온중심들사이의 거리가 이 평균체적과 같은 체적을 가지는 바른6면체의 한개의 변의 길이와 같음을 알수 있다.

4. 표준조건에서 공기 1mol의 체적은 $V=$ 22.4L, 그속에 들어있는 분자수는 $N_A=$ $6.02\times10^{23}\text{mol}^{-1}$개이다. 따라서 공기분자 1개가 차지하는 평균체적은 $V_0=V/N_A=$ $3.72\times10^{-26}\text{m}^3$이다. 바른6면체모형을 리용하면 분자들사이의 평균거리는 $r_0=\sqrt[3]{V_0}=3.3\times10^{-9}\text{m}$이다.

5. 50~60kg정도이다.

풀이방향. 방안의 온도를 300K정도로 보고 그속에 들어있는 공기의 몰질량을 구한 다음 그 질량을 구하여라.

6. 1) 이 문제를 풀자면 물 1mol의 체적 V를 알면 된다.

$\rho = \frac{M}{n} N$ 으로부터 $V = M / \rho$, 따라서 $1 cm^3$속에 들어있는 물분자의 수

$$n = \frac{N_A}{V} = \frac{N_A \rho}{M} = = \frac{6.022 \times 10^{-23} \times 10^3}{10^6 \times 1.8 \times 10^{-2}} = 3.9 \times 10^{22} (cm^{-3})$$

2) 물분자를 구모양으로 보면 분자 한개의 체적

$$V_0 = \frac{1}{6} \pi d^3, \qquad V_0 = \frac{V}{N_A} = \frac{M}{N_A \rho}$$

이로부터

$$d = \sqrt[3]{\frac{6M}{\pi N_A \rho}} = \sqrt[3]{\frac{6 \times 1.8 \times 10^{-2}}{3.14 \times 6.022 \times 10^{-23} \times 10^3}} = 3.9 \times 10^{-10} (m)$$

7. 1) $\nu = c / \lambda$ (c는 진공속에서의 빛속도)로부터

$$\nu_1 = \frac{3 \times 10^8}{2 \times 10^{-9}} = 1.5 \times 10^{17} Hz$$

$$\nu_2 = \frac{3 \times 10^8}{2 \times 10^{-8}} = 1.5 \times 10^{16} Hz$$

즉 태양복사의 주파수범위는 $1.5 \times 10^{16} \sim 1.5 \times 10^{17} Hz$이다.

2) 1h동안에 태양겉면으로부터 복사되는 에네르기총량은

$$W = 4\pi \sigma R_{태}^2 \cdot T^4 \cdot t =$$

$$= 4 \times 3.14 \times 5.67 \times 10^{-8} \times (696 \times 10^6)^2 \times 5\,770^4 \times 3\,600 =$$

$$= 1.38 \times 10^{30} (J)$$

3) 화성겉면온도를 T, 태양으로부터 화성까지의 거리를 d라고 하면 단위시간동안에 화성이 흡수하는 태양의 에네르기는

$$P_{흡} = 4\pi R_{태}^2 \sigma T_{태}^4 \cdot \frac{\pi r^2}{4\pi d^2}$$

이다. 그런데 $d = 400 R_{태}$ 이므로 $P_{흡} = \pi \sigma T_{태}^4 r^2 / 400^2$ 이다. 한편 화성겉면에서 단위시간당 복사되는 에네르기는 $P_{복} = 4\pi r^2 \sigma T^4$ 이며 복사, 흡수 평형상태에서는 $P_{복} = P_{흡}$ 으로 된다. 즉

$$\pi \sigma T_{태}^4 r^2 / 400^2 = 4\pi r^2 \sigma T^4$$

이며 따라서 $T = T_{태} \big/ \sqrt{800} = 240 (K)$

8. 대기압이란 대기층을 이루고있는 공기분자들이 땅결면을 누르는 압력이다. 따라서 대기층전체에 들어있는 공기분자들의 총 질량을 m 이라고 놓으면 $mg = P_0 \cdot 4\pi R^2$ 으로 된다.

여기서 g 는 지구걸면근방에서의 중력가속도, P_0 은 지구걸면근방에서의 대기압, R 는 지구의 반경이다. 이로부터

$$m = \frac{P_0 \cdot 4\pi R^2}{g} = 10^5 \times \frac{4\pi \times (6.4\times 10^6)^2}{10} = 5.14\times 10^{18}(\mathrm{kg})$$

표준조건에서 대기층이 차지하고있는 전체 체적은

$$V = \frac{mV_0}{\mu} = 4\times 10^{24}\,\mathrm{mL}$$

이다. 여기서 μ 는 공기의 평균몰질량, V_0 은 공기 1mol의 체적이다. 사람이 한번 호흡했다가 내쉰 공기가 1년어간에 대기속에 골고루 퍼졌다고 보면 그 비률은

$$n = \frac{V'}{V} = 1\times 10^{-22}$$

1년후에 한번 들이쉰 공기중에 바로 1년전에 그가 한번 내쉴 때 나갔던 공기분자의 수는

$$n' = \frac{nV' N_\mathrm{A}}{V_0} = \frac{1\times 10^{-22}\times 0.4\times 6.02\times 10^{23}}{22.4} \approx 1$$

9. 열량계가 외부와 단열되여있다고 할 때 다음과 같은 세가지 경우가 있을수 있다.

1) 물이 전부 얼음으로 되면서 최종온도가 $t < 0^\circ\mathrm{C}$ 인 경우

이때 열평형방정식은

$$c_1m_1(t_{12} - t) + c_2m_2(t_{12} - 0) + m_2L + c_3m_2(0 - t) = c_3m_3(t - t_3)$$

따라서

$$t = \frac{(c_1m_1 + c_2m_2)t_{12} + c_3m_3t_3 + m_2L}{c_1m_1 + c_3(m_2 + m_3)}$$

이며 $t < 0^\circ\mathrm{C}$ 로 되자면

$$t_3 < \frac{(c_1m_1 + c_2m_2)t_{12} + m_2L}{c_3m_3}$$

로 되여야 한다.

2) 얼음이 전부 녹아 물로 되면서 최종온도가 $t > 0^\circ\mathrm{C}$ 인 경우

이때 열평형방정식은

$$c_1m_1(t_{12}-t)+c_2m_2(t_{12}-t)=c_3m_3(0-t_3)+m_3L+c_2m_3(t-0)$$

결국

$$t=\frac{(c_1m_1+c_2m_2)t_{12}+c_3m_3t_3-m_3L}{c_1m_1+c_2(m_2+m_3)}$$

이며 $t>0^\circ\mathrm{C}$ 로 되자면

$$t_3>\frac{m_3L-(c_1m_1+c_2m_2)t_{12}}{c_3m_3}$$

로 되여야 한다.

3) 얼음과 물이 섞여있으면서 $t=0^\circ\mathrm{C}$ 로 되는 경우

만일 t_3 이 우의 두 경우에서 얻어낸 조건에 만족되지 않는다면 최종상태는 얼음과 물이 혼합되여있으면서 $t=0^\circ\mathrm{C}$ 인 상태이다. 따라서 이러한 상태가 나타날 조건은

$$\frac{(c_1m_1+c_2m_2)t_{12}+m_2L}{c_3m_3}\le t_3\le\frac{m_3L-(c_1m_1+c_2m_2)t_{12}}{c_3m_3}$$

으로 된다.

10. 수은방울이 바닥에 떨어져 작은 방울들로 갈라질 때 그의 전체 체적은 변하지 않았지만 겉면적은 커진다. 이때 증가된 겉면에네르기는 중력에네르기의 감소로부터 보충되는 량이다. 방울이 떨어질 때 력학적에네르기의 손실(열에네르기에로의 전환)이 없는 조건하에서 그 높이가 최소로 될것이다. 원래 수은방울의 반경을 R, 갈라진 작은 수은방울의 반경을 r 라고 하면

$$\frac{4}{3}\pi R^3=n\cdot\frac{4}{3}\pi r^3$$

로 되며 에네르기 전환관계는

$$mgh=(4\pi r^2n-4\pi R^2)\sigma$$

여기서 $m=\rho\cdot4\pi R^3/3$ 으로 놓으면

$$h=\frac{3\sigma}{\rho gR}\left(\sqrt[3]{n^{-2}}-1\right)$$

11. A와 B에서의 액체의 온도, 액면의 높이, 체적들을 각각 t_1,

h_1, V_1와 t_2, h_2, V_2로 표시하면

$$\frac{h_1}{h_2}=\frac{V_1}{V_2}$$

이며 관 A와 B안에서 액체의 질량은 서로 같다. 그리고

$$V_1=V_0(1+\alpha t_1),\quad V_2=V_0(1+\alpha t_2)$$

이므로 $$\frac{V_1}{V_2}=\frac{1+\alpha t_1}{1+\alpha t_2},\quad \frac{h_1}{h_2}=\frac{1+\alpha t_1}{1+\alpha t_2}$$

결국 $$\alpha=\frac{h_1-h_2}{h_2 t_1-h_1 t_2}$$

12. 바다물이 일을 수행하는 과정을 몇단계로 갈라볼수 있다. 그 첫단계는 작업실안의 공기를 단열압축하면서 바다물이 수행한 일이 기체의 내부에네르기로 변화되는 과정이다. 둘째단계는 등압상태에서 피스톤을 올려밀면서 일을 수행하는 과정이다. 단열압축단계에서는 바다물이 피스톤을 올려밀면서 단열적으로 일 W_1을 수행하는데 그것이 기체의 내부에네르기로 넘어간다. 즉

$$W_1=\Delta U=n\left(\frac{3}{2}R\right)\left(T_2-T_1\right)=\frac{3(P_2V_2-P_1V_1)}{2}=$$

$$=\frac{3}{2}P_1V_1\left[\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{2/5}-1\right]=3.49\times10^4(\mathrm{J})$$

S_1가 열린 다음은 등압압축과정이며 이때 바다물이 피스톤을 올려밀면서 수행하는 일은

$$W_2=P\Delta V=P_2V_2=P_2V_1\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{3/5}=4.66\times10^4\,\mathrm{J}$$

따라서 바다물이 한번 상승하면서 수행하는 일은

$$W=W_1+W_2=8.15\times10^4\,\mathrm{J}$$

13. 흐름관 입구에서와 출구에서 공기의 분자밀도를 n_1, n_2 라고 하면 $n_0 v_0=n_1 v_1$ 로 된다. 그리고 Δt 시간동안에 에네르기흐름관계식은

$$n_0 v_0 \Delta t \cdot S\left(\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{5}{2}kT_0\right) + P\,\Delta t = n_1 v_1 \Delta t \cdot S\left(\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{5}{2}kT_1\right)$$

로 된다. 금속그물이 기체를 가열하므로 기체는 팽창되며 따라서 흘러나가는 기체의 흐름속도가 커지게 된다. 이렇게 되면 흘러나가는 기체의 총운동량이 흘러들어올 때보다 좀 커지게 되고 결국 금속그물망의 가열에 의해 추진력 F를 받게 된다. 이 추진력은 단위시간당 운동량변화량과 같으므로

$$F = \frac{n_0 v_0 \Delta t \cdot Sm(v_1 - v_0)}{\Delta t}$$

한편 볼쯔만상수 $k = R / N_A$ (N_A 은 아보가드로수), 흐름관입구에서의 압력 P_0 은 리상기체상태방정식으로부터

$$P_0 = \frac{nkN_A}{V} \cdot T_0 = n_0 kT_0$$

이다. 여기서 n 은 물질량(몰수), n_0 은 입구에서 나오는 분자수밀도이다. 우의 식들을 련립하면

$$T_1 = \frac{1}{5k}\left[\frac{2PkT_0}{P_0 v_0 S} - m(v_1^2 - v_0^2)\right] + T_0$$

$$F = \frac{P_0}{kT_0} v_0 S\, m(v_1 - v_0)$$

제10장. 기체의 성질

1. 2), 3), 4)

풀이방향. 리상기체상태방정식

$$P = \frac{nRT}{V} \quad (n\text{은 기체의 물질량})$$

을 놓고 고찰하면 인차 판단할수 있다. 사실 O점과 c점, O점과 d점을 련결하는 직선(등적변화선)을 그려놓고 고찰하면 기체의 질량이 주어진 경우에 Oc, Od, Oa선들중 그 경사도가 클수록 그의 체적이 더 작다는 결론이 나온다.

2. 3)

풀이방향. 용기안에 있는 기체인 경우 그의 압력과 체적은 언제나 일정하다. 따라서 리상기체상태방정식 $PV = nRT$ 로부터 용기속에 있는 기체의 몰수와 그 온도의 승적이 상수임을 알수 있다. 결국 용기속에 들어있는 기체분자들의 총수와 그 온도와의 승적도 상수이다.

3. 고압증기가 안전변을 들고 배출되는 순간에는 그림 2-10-1에서와 같이 $P = P_0 + mg/S$ 이다. 여기서 S는 배기구멍의 자름면적(고압변의 가로자름면이 아니다. 그 원인은 배기구멍의 안과 밖에서만 압력차가 생기기때문이다.)이다. 값을 넣으면

$$P = 2.4\times10^5\,\text{Pa}$$

PS

P_0S

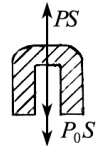



그림 2-10-1

이 압력은 표준대기압보다 1.4×10^5Pa 만큼 커진것이므로 물의 끓음점은 $1.4\times10^5 \div 3.6\times10^3 = 39(^\circ\text{C})$ 만큼 높아진다. 따라서 물의 온도는 139℃이다.

4. 기통이 수평으로 설치되였고 피스톤과 기통벽사이의 마찰을 무시하므로 평형상태에서 두 기통안의 압력은 같아야 한다. 처음 상태에서 기통내부의 압력을 P_0, 기통 1과 2의 체적을 각각 V_1, V_2, 피스톤 A가 오른쪽으로 d만큼 이동할 때 피스톤 B가 오른쪽으로 이동한 거리를 x, 마지막상태에서 두 기통안의 압력을 P라고 하자. 온도가 변하지 않으므로 두 기통 1과 2안에 있는 기체들에 보일-마리오트의 법칙(등온변화법칙)을 적용하면

기통 1에서는 $P_0V_1 = P(V_1 - Sd + Sx)$,

기통 2에서는 $P_0V_2 = P(V_2 - Sx)$

로 된다. 우의 두 식으로부터 x를 구하면

$$x=\frac{V_2}{V_1+V_2}d \text{ 이며 } \frac{V_1}{V_2}=\frac{3}{2} \text{ 이므로 } x=\frac{2}{5}d$$

5. 처음상태에서 기체의 온도를 T_0이라고 하자. 그러면 피스톤이 제한턱에서 떨어지는 순간에 기체의 온도는 $T_0+\Delta T$이며 이때 압력을 P_1로 놓으면

$$\frac{T_0+\Delta T}{T_0}=\frac{P_1}{P_0}$$

기체기둥이 H_1일 때 기체의 온도를 T_1이라고 하면 등압과정이므로 $\frac{T_1}{T_0+\Delta T}=\frac{H_1}{H_0}$, 기둥높이가 H_2일 때 온도를 T_2이라고 하면 등온($T_2=T_1$)과정이므로 $\frac{P_0}{P_1}=\frac{H_1}{H_2}$, 따라서 $\frac{T_0+\Delta T}{T_0}=\frac{H_2}{H_1}$이므로 $T_0=\frac{H_1}{H_2-H_1}\Delta T$ 이며 결국 $\frac{T_1}{T_0}=\frac{H_2}{H_0}$이다. $T_2=T_1$임을 고려하면

$$T_2=T_1=\frac{H_2H_1\Delta T}{H_0(H_2-H_1)}=540\text{K}$$

6. 1) 기통속의 기체압력을 P, 가는 끈에 작용하는 장력을 F라고 하면 피스톤 A, B, 가는 막대기전체의 평형조건은

$$P_0S_\text{A}-PS_\text{A}+PS_\text{B}-P_0S_\text{B}+F=0$$

따라서
$$P=P_0+\frac{F}{S_\text{A}-S_\text{B}}$$

처음상태에서 $F=F_1=30\text{N}$이므로 기통속의 기체의 처음압력은 $P_1=P_0+\frac{F_1}{S_\text{A}-S_\text{B}}=1.2\times10^5\text{Pa}$이다. 또한 $P>P_0$일 때라야만 가는 끈에 장력이 작용하면서 피스톤이 움직일수 없게 된다. 기통속의 기체의 온도를 낮추는 과정은 등적과정이며 온도가 낮아지면서 압력이 P_0까지 낮아졌을 때라야 가는 끈에 걸린 장력이 0으로 된다. 온도를 더 낮추면 피스톤이 오른쪽으로 이동하게 되는데 이때의 온도를 T_2이라고 하면 압력은

$P_2 = P_0$ 이므로 $\dfrac{T_2}{T_1} = \dfrac{P_0}{P_1}$, 따라서 $T_2 = 450\text{K}$

2) 온도를 더 낮추면 가는 끈은 느슨해지며 평형조건은 $P = P_0$ 으로 된다. 그리고 그 다음은 등압과정으로 피스톤이 오른쪽으로 이동하면서 기체의 체적이 작아지며 피스톤 A가 련결부위에 닿을 때의 온도를 T_3 으로 놓으면

$$\frac{2S_\text{A}l + S_\text{B}l}{T_2} = \frac{3lS_\text{B}}{T_3}, \quad T_3 = 270\text{K}$$

3) 온도를 $T_3 = 270\text{K}$로 고정시키고 피스톤을 왼쪽으로 미는 과정은 등온과정이며 맨 마지막상태에서 기체의 압력을 P_4 로 놓으면

$$\frac{P_4}{P_0} = \frac{3lS_\text{B}}{2lS_\text{A} + lS_\text{B}}$$

그런데 F_2 은 왼쪽으로 피스톤을 미는 힘이므로 힘의 평형조건은 $P_0S_\text{A} - P_4S_\text{A} + P_4S_\text{B} - P_0S_\text{B} + F_1 - F_2 = 0$

$$\therefore \; F_2 = 90\text{N}$$

7. 용수철의 원래의 길이를 l_0, 기체의 처음압력을 P, 마지막압력을 P' 로 표시하면 보일-마리오트의 법칙에 의해 $Pl = P'2l$ 이다. 처음상태에서 피스톤이 받고있는 힘들을 그림 2-10-2의 ㄱ에 주었다. 이때 이 힘들의 평형조건은

$$PS = P_0S + k(l - l_0)$$

마지막상태에서 피스톤이 받고있는 힘들은 그림 ㄴ와 같으며 이 힘들의 평형조건은

$$P'S + F = P_0S + k(2l - l_0)$$

이다. 우의 식들을 련립하면

$$P = \frac{2(F - kl)}{S}, \quad l_0 = l + \frac{S}{k}(P_0 - P)$$

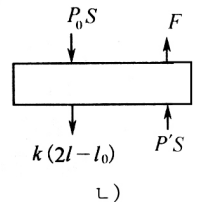
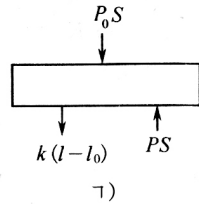
$F = 500\text{N}$일 때 $P = 0.4P_0$, $l_0 = 1.5\text{m}$

이때 용수철은 처음이나 마지막이나 다 압축된 상태에 있다.

ㄱ)

ㄴ)

그림 2-10-2

$F = 700\text{N}$인 경우에는 $P = 0.8P_0$, $l_0 = 0.833\text{m}$, 보는바와 같이

이 경우에 처음상태에서는 용수철이 압축되여있었으나 마지막 상태에서는 용수철이 늘어난 상태에 있다.

8. 1) 리상기체상태방정식 $PV = \frac{m}{\mu}RT$ 를 리용하면 처음의 평형상태에서 세 부분의 리상기체들의 질량사이에 다음과 같은 관계가 성립된다는것을 알수 있다.

$$m_1 : m_2 : m_3 = \frac{V_1}{T_1} : \frac{V_2}{T_2} : \frac{V_3}{T_3} = \frac{\alpha_1}{T_1} : \frac{\alpha_2}{T_2} : \frac{\alpha_3}{T_3}$$

마지막 평형상태에 이르면 세 부분의 압력과 온도가 모두 같아지므로

$$\alpha_1' : \alpha_2' : \alpha_3' = V_1' : V_2' : V_3' = m_1 : m_2 : m_3$$

한편 $$\alpha_1' + \alpha_2' + \alpha_3' = 360^\circ$$

수값을 넣어 계산하면 $\alpha_1' = 99^\circ$, $\alpha_2' = 112^\circ$, $\alpha_3' = 149^\circ$

2) 기체의 비열을 c, 마지막 평형상태에서의 온도를 T, 압력을 P 로 표시하면 에네르기보존법칙으로부터

$$m_1 c(T - T_1) + m_2 c(T - T_2) + m_3 c(T - T_3) = 0$$

우의 식들과 련립하여 구하면

$$T = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2 + m_3 T_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{\alpha_1' T_1 + \alpha_2' T_2 + \alpha_3' T_3}{\alpha_1' + \alpha_2' + \alpha_3'} = 298(\mathrm{K})$$

리상기체상태방정식으로부터 $PV = (m_1 + m_2 + m_3)\frac{RT}{M}$ 이며

이상의 식들로부터 $P = P_0$ 임을 알수 있다.

9. 수은의 흐름이 멎게 되는 때에 용기속에서 수은면이 x cm만큼 더 내려왔다고 하자. 이때 용기속에 있는 기체의 압력은

$$P = (10 + 40 + x)\rho_{수} g = (50 + x)\rho_{수} g$$

이다. 용기속의 기체에 보일-마리오트의 법칙을 쓰면

$$75 \times 40 = (50 + x)(40 + x)$$

즉 $$x^2 + 90x - 1\,000 = 0$$

이로부터 $x = 10$cm. 따라서 이때 기체의 압력은

$$P = (50 + x)\rho_{수} g = 60\rho_{수} g$$

즉 수은면이 10cm 더 내려온다.

10. 기체의 내부에네르기증가량은 두개의 피스톤이 내려올 때 그의 포텐샬에네르기의 감소량과 같다.(그림 2-10-3) 즉

$$\frac{m}{\mu}\frac{3}{2}R(T_2-T_1)=2Mg_{달}(h_1-h_2)$$

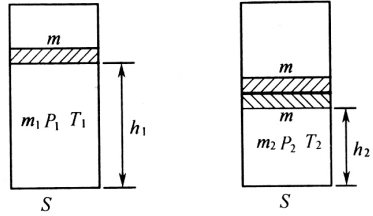



그림 2-10-3

리상기체상태방정식에 의해

$$P_1h_1S=\frac{3}{2}RT_1, \quad P_2h_2S=\frac{3}{2}RT_2$$

로 되며 처음상태에서와 마지막상태에서

$$P_1=\frac{Mg_{달}}{S}, \quad P_2=\frac{2Mg_{달}}{S}$$

로 된다. 우의 식들로부터 $T_2=1.4T_1$

11. 1) 피스톤을 평형자리로부터 약간 오른쪽으로 이동시킨 거리를 x라고 하자.(그림 2-10-4) 이때 왼쪽 기통에서 기체의 압력을 P_1, 그의 체적을 $V_1'=V_1+xS$, 오른쪽 기통에서의 기체압력을 P_2, 그의 체적을 $V_2'=V_2-xS$ 라고 하자.

그림 2-10-4

왼쪽 기통에 보일-마리오트법칙을 쓰면

$$PV_1=P_1(V_1+xS)$$

오른쪽 기통에서는

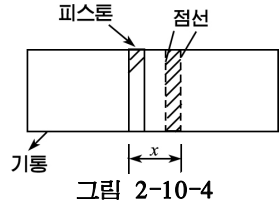
$$PV_2=P_2(V_2-xS)$$

로 된다. 이로부터

$$P_1=\frac{PV_1}{V_1+xS}=\frac{P}{1+\frac{xS}{V_1}}\approx P\left(1-\frac{xS}{V_1}\right)$$

$$P_2=\frac{PV_2}{V_2+xS}=\frac{P}{1+\frac{xS}{V_2}}\approx P\left(1-\frac{xS}{V_2}\right)$$

오른쪽 방향을 x축의 정방향으로 취하면 피스톤이 받는 힘

$$F=(P_1-P_2)S=-PS^2\frac{V_1+V_2}{V_1V_2}x=-kx$$

우의 식에서 $k = PS^2 \dfrac{V_1 + V_2}{V_1 V_2}$ 은 상수이다. 우의 식은 피스톤이 조화진동을 한다는것을 보여준다.

2) 조화진동주기공식 $\tau = 2\pi\sqrt{m/k}$ 으로부터 피스톤의 진동주기

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{mV_1V_2}{PS^2(V_1 + V_2)}}$$

3) V_1, V_2 이 일정할 때 진동주기는 평형상태에서의 압력 P 의 1/2제곱에 거꿀비례한다. 기통속에 들어있는 기체의 질량 m 은 일정하며 전체 체적 $V_1 + V_2$ 도 일정하므로 샬의 법칙(등적변화법칙)을 쓰면

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

이로부터 $\dfrac{\tau_1}{\tau_2} = \sqrt{\dfrac{P_2}{P_1}} = \sqrt{\dfrac{T_2}{T_1}} = \sqrt{\dfrac{273+40}{273}} = 1.07$

12. 수은을 병에 담아 피스톤우에 놓았을 때 기통안에서 기체의 압력증가량을 h 라고 하면 등온변화법칙에 의해

$$H_0L_0 = (H_0 + h)L, \qquad h = \frac{H_0(L_0 - L)}{L}$$

이다. 이때 h 는 수은의 질량에 따라 달라진다. 다음 수은을 그대로 피스톤우에 천천히 쏟아부어 피스톤이 정지되였을 때 피스톤웃면에서 수은기둥의 높이를 ΔH, 피스톤이 아래로 이동한 거리를 Δx 라고 하면 보일-마리오트의 법칙에 의해

$$H_0L_0 = (H_0 + \Delta H)\,(L_0 - \Delta x) \quad \rightarrow \quad \Delta H = \frac{H_0\Delta x}{L_0 - \Delta x}$$

로 된다. 따라서 다음과 같은 두가지 경우가 있을수 있다.

첫째로, 수은의 량이 작아서 병안의 수은을 모두 쏟아부은 후 피스톤웃쪽의 기통을 다 채우지 못하던지 혹은 겨우 채워진 경우.

이때 $\Delta H = h$ 이며 $\Delta H \le \Delta x$ 로 된다. 또한 $\Delta x = L_0 - L$ 이므로 피스톤으로부터 기통바닥까지의 거리는 $L' = L_0 - x = L$, 결국 $L \ge H_0$ 이며 이때에는 $L' = L$ 이다.

둘째로, 병안의 수은량이 많아서 피스톤웃부분의 기통을 충분히 채우는 경우.

이때는 아직 병속에 수은이 남아있게 된다. 이때에는 $\Delta H = \Delta x$, $\Delta H < h$ 이므로 $\Delta x = L_0 - H_0$ 으로 된다. 피스톤으로부터 기통바닥까지의 거리는 $L' = L_0 - \Delta x = H_0$, 결국 $L < H_0$ 이며 이때에는 $L' = H_0$ 으로 된다.

13. 관속에 있는 기체기둥의 높이를 h 라고 하자. $H = h$ 일 때 $H = H_C$ 로 된다. 유리관을 누르는 과정은 그림 2-10-5의 ㄱ를 참고하여라.

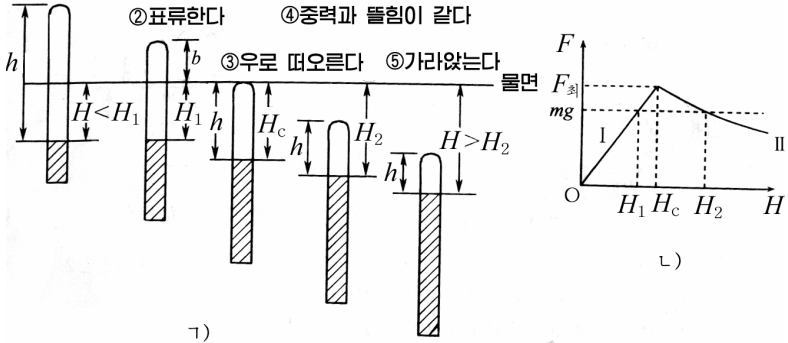



그림 2-10-5

1) 유리관이 전부 물속에 잠기기 전(즉 $H < H_C$ 일 때)에는 아르키메데스의 법칙에 의해 $F = \rho gHS$ 이며 유리관이 구면밑에 잠겼을 때 (즉 $H > H_C$ 일 때)에는 아르키메데스의 법칙 $F = \rho ghS$ 와 리상기체의 등온방정식

$$(P_0 + \rho gH)Sh = (P_0 + \rho gH_1)\ (b + H_1)S$$

그리고 그림 ㄱ에서 ②의 경우 (표류)에 mg 와 뜰힘 ρgH_1S 가 비기고있다는 조건을 리용하면

$$F = \frac{(P_0S + mg)(b + H_1)S}{H + \dfrac{P_0}{\rho g}}$$

2) 유리관이 완전히 잠기지 않는 상태에서 표류할 때는

$$\rho gHS = mg \qquad \rightarrow \qquad H = H_1 = \frac{m}{\rho S}$$

으로 된다. 유리관이 물면밑에 완전히 잠긴 상태에서 물속에서 떠돌아다닐 때 (그림 ㄱ에서 ④) H 값은

$$H_2 = \frac{m}{\rho S} + \left(1 + \frac{P_0 S}{mg}\right) b$$

3) $F = \rho g H S$ 는 H 에 대한 1차함수이며

$$F = \frac{(P_0 S + mg)(b + H_1) S}{H + P_0 / \rho g}$$

는 H 에 대한 감소함수이다. 두 함수의 련결점에서 F는 극대값이므로 이 위치에서 뜰힘이 최대로 된다. 이때

$$h = H = H_C$$

로 된다. 이것을 식

$$(P_0 + \rho g H) S h = (P_0 + \rho g H_1)(b + H_1) S$$

에 넣고 정리하면

$$\rho g H_C^2 + P_0 H_C - (P_0 + \rho g H_1)(b + H_1) = 0$$

이고 그 풀이는

$$H_C = -\frac{P_0}{\rho g} + \sqrt{\left(\frac{P_0}{2\rho g}\right)^2 + \left(\frac{P_0}{\rho g} + \frac{m}{\rho S}\right)\left(b + \frac{m}{\rho S}\right)}$$

따라서 뜰힘의 최대값은

$$F_{최} = -\frac{P_0 S}{2} + \sqrt{\left(\frac{P_0 S}{2}\right)^2 + \left(P_0 S + mg\right)\left(\rho g b S + mg\right)}$$

4) $F = f(H)$ 함수는 그림 ㄴ와 같다.

14. 기구에 기체를 가득 채우되 기구안에서 기체의 압력이 기구밖에서보다 클 때 이 기구는 팽팽해지면서 각부분에 장력이 생기게 된다. 이 장력에 의해 기구가 찢어지게 된다. 이 기구속의 기체를 오른쪽 반구와 왼쪽 반구로 갈라서 고찰하자. 그들의 접촉선은 직경이 d인 원둘레이며 그 길이는 πd 이다. 따라서 이 부분의 천이 찢어지려면 거기에 걸리는 장력이 $f_{최} \cdot \pi d$ 로 되여야 한다. 이제 왼쪽 부분의 반구를 주목하면 여기에 작용하고 있는 힘은 세가지이다.

첫째로, 바깥대기의 압력에 의한 힘이다. 그 크기는 $P_h \dfrac{\pi d^2}{4}$.

여기서 P_h 는 h만 한 높이에서 대기의 압력이며 이 힘의 방향은 오른쪽으로 향한다.

둘째로, 기구내부의 기체의 압력에 의한 힘이다. 그 크기는 $P\frac{\pi d^2}{4}$ 이며 방향은 왼쪽으로 향한다.

셋째로, 오른쪽 반구가 이 왼쪽 반구에 주는 장력 F 로서 그의 방향은 오른쪽으로 향한다.

왼쪽 반구는 이 세 힘의 작용하에서 평형상태를 이루고있다. 즉

$$P\frac{\pi d^2}{4} = P_h\frac{\pi d^2}{4} + F$$

$F > f_{최} \cdot \pi d$ 이면 기구가 찢어진다. 즉 이 조건은

$$(P - P_n)\frac{\pi d^2}{4} > f_{최}\pi d$$

기구가 높이 h 에서 터진다면

$$P_h = P_{h_0} + \alpha_P h, \quad T = T_0 + \alpha_T h$$

기구가 떠오를 때 체적은 변하지 않으므로

$$\frac{P}{T} = \frac{P_0}{T_0}$$

우의 식들을 련립하면

$$h > \frac{(4f_{최}/d) - (P_0 - P_{h_0})}{(P_0/T_0)\alpha_T - \alpha_P} = 2.1 \times 10^3 \mathrm{m}$$

15. 타원의 표준방정식은

$$\frac{V^2}{(V_0/2)^2} + \frac{P^2}{(P_0/2)^2} = 1$$

따라서

$$P = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{V^2}{V_0^2}}\,P_0,$$

$$PV = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{V^2}{V_0^2}}\,P_0 V = \sqrt{\frac{V_0^2}{64} - \frac{1}{4V_0^2}\left(2V^2 - \frac{1}{4}V_0^2\right)^2}\,P_0$$

이로부터 $P = \sqrt{2}P_0/4,\ V = \sqrt{2}V_0/4$ 일 때 PV는 극대값을 가지며 $P = -\sqrt{2}P_0/4,\ V = -\sqrt{2}V_0/4$ 일 때 PV는 극소값을 가진다. 자리표를 평행이동시키면 $P' = P_0 + \sqrt{2}P_0/4,\ V' = V_0 + \sqrt{2}V_0/4$ 일 때

$$\left(P'V'\right)_{최대} = \left(1+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 P_0V_0$$

이며 $P' = P_0 - \sqrt{2}P_0/4,\ \ V' = V_0 - \sqrt{2}V_0/4$ 일 때

$$\left(P'V'\right)_{최소} = \left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 P_0V_0$$

으로 된다. 리상기체상태방정식 $P'V' = nRT'$, $P_0V_0 = nRT_0$ 을 리용하여 계산하면

$$T'_{최대} = \left(1+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 T_0 = 549.6\mathrm{K}$$

$$T'_{최소} = \left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 T_0 = 125.4\mathrm{K}$$

제11장. 열학종합문제

1. 열장벽을 설치한 후 평형상태에 이른 다음 온도와 열에네르기흐름을 그림 2-11-1에 보여주었다. 여기서

$$J = \sigma(T_h^4 - T_1^4), \qquad J = \sigma(T_1^4 - T_2^4), \qquad J = \sigma(T_2^4 - T_L^4)$$

이 식들에서 J`는 열복사에네르기흐름밀도이고 σ 는 비례결수이다. 우의 세 식들을 합하면 $3J == \sigma(T_h^4 - T_L^4) = J_0$ 이다. 여기서 J_0 은 열장벽이 없을 때 평형상태에서의 열복사에네르기흐름밀도이다. 결국

$$\beta = \frac{J}{J_0} = \frac{1}{3}$$

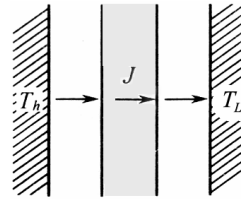



그림 2-11-1

2. 수소기체가 떠오르는 과정에 물의 압력이 부단히 작아지므로 수소기체의 체적이 계속 커진다. 그러므로 수소기체가 받는 뜰힘도 계속 커지게 되므로 이 운동은 등가속운동이 아니다. 물면으로부터 h 만 한 깊이에서 기체가 받는 합력 F 는 $F = \rho gV - mg$ 이다.

한편 $V=\dfrac{nRT}{P}$, $P=P_0+\rho gh$, $T=\dfrac{1}{8.31}\left(10^{-2}h^2+0.12h+0.2\right)$ 이므로 F 값을 구하면 $F=-10^{-6}h$ 이다. $F\propto h$ 이므로 수소기체덩어리가 떠오르는 과정이 조화진동에서 물체가 힘을 받는 과정과 류사한 특징을 가지고 있다는것을 알수 있다. 때문에 이 과정을 물면에 원점을 둔 조화진동의 한 부분으로 볼수 있다. 수소기체가 떠올라 물면에 닿는 시간은 우에서 고찰한 가상적인 조화진동주기의 1/4이므로

$$t=\frac{T}{4}=\frac{1}{4}\times 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=\frac{1}{4}\times 2\pi\sqrt{\frac{2\times 10^{-4}\times 10^{-3}}{10^{-6}}}=0.7(\mathrm{s})$$

3. 매개의 기통에 들어있는 기체의 물질량(몰수)은 $n=PV/(RT)$ 이다. 여기서 T 는 주위환경의 온도로서 고정되여있다.

첫 기통을 련결하고 평형상태에 도달했을 때 기체의 압력은

$$P_1=\frac{nRT}{V_0+V}=\frac{PV}{V_0+V}$$

진공통속에 들어있는 기체의 물질량은

$$n_1=\frac{P_1V_0}{RT}=\frac{V_0}{V_0+V}\cdot\frac{PV}{RT}=\frac{V_0}{V_0+V}\cdot n$$

둘째 기통을 련결하고 평형상태에 이르렀을 때 기체의 압력은

$$P_2=\frac{(n+n_1)RT}{V_0+V}=\left(1+\frac{V_0}{V_0+V}\right)\cdot\frac{PV}{V_0+V}$$

진공통속에 들어있는 기체의 물질량은

$$n_2=\frac{P_2V_0}{RT}=\left(1+\frac{V_0}{V_0+V}\right)\frac{V_0}{V_0+V}\cdot n$$

세번째 기통을 련결하고 평형상태에 이르렀을 때 기체의 압력은

$$P_3=\frac{(n+n_2)RT}{V_0+V}=\cdots=\left[1-\frac{V_0}{V_0+V}+\left(\frac{V_0}{V_0+V}\right)^2\right]\cdot\frac{PV}{V_0+V}$$

진공통속에 들어있는 기체의 물질량은

$$n_3=\frac{P_3V_0}{RT}=\left[1+\frac{V_0}{V_0+V}+\left(\frac{V_0}{V_0+V}\right)^2\right]\frac{V_0}{V_0+V}\cdot n$$

N번째 기통을 련결했을 때에는

$$P_N = \left[1 + \frac{V_0}{V_0+V} + \left(\frac{V_0}{V_0+V}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{V_0}{V_0+V}\right)^{N-1}\right] \cdot \frac{PV}{V_0+V} =$$

$$= \left[1 - \left(\frac{V_0}{V_0+V}\right)^N\right] P$$

이때 진공통속의 기체의 압력이 P_0 에 이르렀다면 $P_N = P_0$

이로부터 $$N = \frac{\lg \frac{P-P_0}{P}}{\lg \frac{V_0}{V_0-V}}$$

이 결과식을 좀 더 정리할수도 있다.

4. 포화수증기를 리상기체로 보면 $P = n_0 kT$ 이다. 여기서 P 는 수증기압력, n_0 은 수증기분자수밀도이다. 따라서 $n_0 = \frac{P}{kT}$

한편 수증기분자들의 평균속도는

$$\overline{v} = c\sqrt{T} \quad \text{(문제조건)}$$

여기서 c 는 상수이다.

Δt 시간동안에 ΔS 만 한 물면을 통해 물로 응축되는 수증기분자의 수 ΔN 은 $\overline{v} \cdot \Delta t$, ΔS, n_0 에 비례할것이다. 즉

$$\Delta N = \beta n_0 (\overline{v} \cdot \Delta t) \Delta S$$

여기서 β 는 비례결수이다. 따라서 단위시간동안에 단위자름면적을 통해 물로 응축되는 분자수 n 은

$$n = \frac{\Delta N}{\Delta t \cdot \Delta S} = \beta n_0 \overline{v}$$

여기에

$$n_0 = \frac{P}{kT}, \qquad \overline{v} = c\sqrt{T}$$

를 넣으면

$$n = \frac{\beta c P}{k\sqrt{T}}$$

평형상태에서는 단위시간당 단위자름면적을 통해 물로 응축되는 수증기분자수와 물에서 증발되는 분자수가 같다.

100℃(즉 373K)때의 포화증기압 $P_{100}=1.01\times10^5$ Pa 과 14℃(즉 287K)때의 포화증기압 $P_{14}=1.6\times10^3$Pa 을 넣고 계산하면

$$n_{100}:n_{14}=\sqrt{\frac{P_{100}}{373}}:\sqrt{\frac{P_{14}}{287}}=56$$

5. 관의 자름면적을 S 라고 하자. U자관을 거꾸로 세워도 관안에 수은이 그냥 남아있다. 이때 공기기둥의 길이의 증가량을 x 로 표시한다.(문제에서 제시한 그림 2-11-2의 ㄴ)

그러면 보일-마리오트의 법칙에 의하여 $P_1\ell_0S=P_2(\ell_0+x)S$ 이다.

결국 $[P_0+(h_2-h_1)]\ell_0=[P_0-(h_2+x)+(h_1-x)](\ell_0+x)$

대응하는 값들을 넣으면

$$80\times15=(70-2x)(15+x)$$

$$x_1=5\text{cm},\qquad x_2=15\text{cm}$$

즉 x 값은 두개가 나오며 이것들은 모두 h_1 보다 작다. 즉 U자관을 거꾸로 뒤집었을 때 공기기둥의 길이가 $\ell_1=\ell_0+x_1$ 인 경우와 $\ell_2=\ell_0+x_2$ 인 두가지 경우가 있을수 있다.

1) $\ell_1=20$cm인 경우를 보자. 이때에 밀페된 기체 A의 압력은

$$P_A=(75-32.5+17.5)133\text{Pa}=60\text{Pa}$$

이다. 이제 공기기둥의 길이를 Δx 만큼 변화시켰다고 하자. Δx 의 부호는 늘어난 경우에 ＋로, 줄어든 경우에 －로 보겠다. 그러면 리상기체의 보일-마리오트의 법칙에 의하여 기체기둥속에서의 압력은

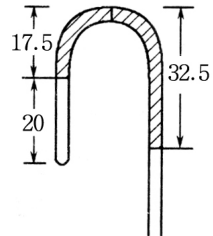
17.5
32.5
20

그림 2-11-2

$$P'_A=\frac{60\times20}{20+\Delta x}\cdot133\text{Pa}=\frac{1\,200}{20+4x}\cdot133\text{Pa}$$

그림과 같이 U자관의 굽은 부분의 중심에서 얇은 수은층을 취하고 고찰하면 이 수은층의 왼쪽과 오른쪽에서의 압력차는

$$\Delta P=P'_A-P_A+2\Delta x=\frac{1\,200}{20+\Delta x}-60+2\Delta x=$$

$$=60\left(1-\frac{\Delta x}{20}\right)^{-1}-60+2\Delta x=60-3\Delta x-60+2\Delta x=-\Delta x<0$$

따라서 이 부분의 중심에 있는 수은층은 왼쪽으로 향하는 힘을 받게 된다. 그러므로 $\ell_1 = 20\text{cm}$인 상태는 안정한 평형상태이다.

2) $\ell_2 = 30\text{cm}$인 경우를 보자. 우와 꼭같은 방법으로 고찰하면

$$\Delta P = \frac{1\,200}{30+\Delta x} - 40 + 2\Delta x = \frac{2}{3}\Delta x > 0$$

이것은 $\ell_2 = 30\text{cm}$인 평형상태가 불안정한 평형상태라는것을 말해준다. 때문에 그 어떤 작은 외부작용을 받게 되면 수은이 전부 오른쪽 관으로 넘어오게 된다. 그러다가 공기기둥의 길이가 x_3에 이르러 평형을 이루었다고 하자. 그러면 역시 보일-마리오트의 법칙에 의하여

$$(P_0 + h_2 - h_1)\ell_0 = (P_0 - h_2 - h_1)x_3$$

$$x_3 = 48\text{cm}$$

우와 같은 방법으로 고찰하면 이 평형상태는 안정한 평형상태임을 알수 있다.

6. 유리관속에 있는 공기기둥의 길이를 h, 공기의 압력을 P, 대기압을 P_0, 수은의 밀도를 ρ, 중력가속도를 g로 표시하자. 그러면 그림 2-11-3의 ㄱ를 통해 알수 있는것처럼

$$P + \rho g(\ell - h) = P_0$$

으로 된다. 문제의 조건으로부터 $P_0 = \rho g \ell$이며 따라서

$$P = \rho g h$$

유리관의 자름면적을 S라고 하면 관속에 있는 공기의 체적은 $V = Sh$, 따라서 $P = \rho g V / S$이다. 즉 관속에 있는 공기의 압력은 그 체적에 비례한다. 리상기체의 상태방정식 $PV = nRT$로부터

$$\rho g \frac{V^2}{S} = nRT$$

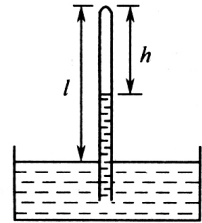
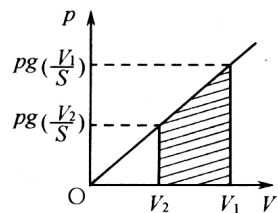
이 식으로부터 온도가 낮아지면 관속에 들어있는 공기의 체적은 작아지며 따라

ㄱ)

ㄴ)

그림 2-11-3

서 공기의 압력도 역시 작아짐을 알수 있다. 체적에 따르는 압력의 변화는 P-V선도에서 원점을 지나는 직선이다.(그림 2-11-3의 ㄴ) 관속의 공기온도가 T_1 로부터 T_2 로 낮아지는 과정에 기체의 체적은 V_1 로부터 V_2 로 작아지므로 외부계로부터 기체에 일이 수행되며 그 값은 그림에서 빗선을 친 부분의 면적과 같으므로

$$W = \frac{1}{2}\rho g\left(\frac{V_1}{S} + \frac{V_2}{S}\right)(V_1 - V_2) = \rho g\left(\frac{V_1^2 - V_2^2}{2S}\right)$$

이며 관속에 들어있는 공기에서 내부에네르기의 변화 ΔU 는

$$\Delta U = nC_V(T_2 - T_1)$$

외부계에서 기체에 전달된 열량을 Q 라고 하면 열력학의 제1법칙에 의해

$$W + Q = \Delta U, \qquad Q = \Delta U - W$$

이므로

$$Q = n(T_2 - T_1)\left(C_V + \frac{R}{2}\right)$$

해당한 수값을 넣으면 $Q = -0.247$J이다.

$Q < 0$이므로 실지로는 관속의 공기가 밖으로 열량을 방출하며 그 값은

$$Q' = -Q = 0.247\text{J}$$

7. 리상기체상태방정식 $PV/T = C$ (C 는 상수)로부터 $P = CT/V$ 이다. 이 식으로부터 알수 있는바와 같이 P-T선도에서 일정한 량의 리상기체의 등적과정은 원점을 지나는 직선으로 표시되며 기체의 체적이 클수록 이 직선의 경사도는 더 작아진다. 따라서 문제에서 제시한 순환과정에 어느 상태에서 기체의 밀도가 제일 커지는가 혹은 제일 작아지는가 하는것은 원점을 지나면서 이 원과 교차되는 직선들중 경사도가 제일 큰것과 작은 것을 찾아내면 된다. 그림 2-11-4에서 OA와 OB이다.

결국 A상태에서 기체의 체적이 제일 커지고 B상태에서 제일 작아지며 밀도는

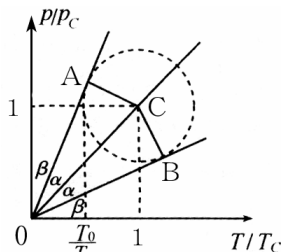



그림 2-11-4

그와 반대로 된다. 따라서

$$\frac{\rho_1}{\rho_1}=\frac{V_A}{V_B}$$

여기서 V_A, V_B는 각각 A, B상태에서 기체의 체적이다. 이 상태에서 기체의 온도를 각각 T_A, T_B로 표시하면

$$\frac{P_A\ V_A}{T_A}=\frac{P_B\ V_B}{T_B}$$

결국 $$\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{P_B\ T_A}{P_A\ T_B}=\frac{(P_B/P_C)(T_A/T_C)}{(T_A/T_C)(P_A/P_C)}=\tan^2\beta$$

각 β는 그림에 표시하여주었다. 그림을 보면 $\alpha+\beta=\pi/4$이므로

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}=\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\left(\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}\right)^2$$

한편 그림에서 $\tan\alpha=\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{OB}}$, CB는 원의 반경 r, $\mathrm{OC}=\sqrt{2}$, $\mathrm{OB}=\sqrt{2-r^2}$ 이므로

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{1-r\sqrt{2-r^2}}{1+r\sqrt{2-r^2}}$$

그림을 보면 원의 반경 r와 순환과정에 제일 낮아지는 온도 T_0 사이에는

$$r=1-\frac{T_0}{T_C}$$

임을 알수 있다. 따라서

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{1-\left(\frac{T_0}{T_C}\right)\sqrt{1+2\frac{T_0}{T_C}-\left(\frac{T_0}{T_C}\right)^2}}{1+\left(\frac{T_0}{T_C}\right)\sqrt{1+2\frac{T_0}{T_C}-\left(\frac{T_0}{T_C}\right)^2}}$$

8. 1) AB직선을 따르는 상태변화과정에서는 $P=\alpha V$가 성립된다. 여기서 $\alpha=P_1/V_1$, 리상기체상태방정식 $PV=nRT$와 우의 식을 결합하면 AB과정에 대하여

$$V=\sqrt{\frac{nRT}{\alpha}} \quad \text{혹은} \quad T=\frac{\alpha V^2}{nR}=\frac{P^2}{\alpha nR} \quad \text{혹은} \quad P=\sqrt{\alpha nRT}$$

들이 성립한다. 그리고 B상태에서 압력은

$$P_2=\alpha V_2=\frac{PV_2}{V_1}$$

AB과정에서 ΔU, W, Q는 각각

$$\Delta U=MC_V\Delta T=n\mu C_V(T_2-T_1)=n\mu C_V\frac{\alpha}{nR}\left(V_2^2-V_1^2\right)=$$

$$=\frac{\mu C_V P_1}{RV_1}\left(V_2^2-V_1^2\right)$$

$$W=\frac{1}{2}(P_2V_2-P_1V_1)=\frac{P_1}{2V}\left(V_2^2-V_1^2\right)$$

$$Q=W+\Delta U=\left(\frac{\mu C_V}{R}+2\right)\frac{P_1}{V_1}\left(V_2^2-V_1^2\right)$$

9. 2) AB과정에서 비열은 $c=\frac{\Delta Q}{M\,\Delta T}$ 이다. 여기서 ΔQ는 AB과정에서 취한 임의의 짧은(미소)과정 $A'B'$에서 흡수한 열량이며 ΔT는 $A'B'$과정에서의 온도증가량이다. A'상태에서 상태변수들을 P_1', V_1', B'상태에서의 상태변수들을 P_2', V_2'로 표시하자. 그러면 AB과정에 대한 계산결과들이 $A'B'$과정에서도 그대로 성립되므로

$$\Delta Q=\left(\frac{\mu C_V}{R}+\frac{1}{2}\right)\frac{P_1'}{V_1'}\left(V_2'^2-V_1'^2\right)$$

또한 $T=\frac{\alpha V_2}{nR}$ 을 리용하면

$$\Delta T=\frac{\alpha}{nR}\left(V_2'^2-V_1'^2\right)=\frac{P_1'}{nRV_1'}\left(V_2'^2-V_1'^2\right)$$

따라서 AB과정에서의 비열은

$$c=\frac{\Delta Q}{M\,\Delta T}=c_V+\frac{1}{2}\frac{R}{\mu}$$

즉 상수로 된다.

10. 1) 알루미니움구가 가열되여있으므로 그것은 얼음을 녹이게 된다. 가령 구의 온도가 t_0일 때 녹게 되는 얼음의 최대체적

이 구의 체적의 절반(반구의 체적)으로 된다고 하자. 이때 얼음면으로부터 얼음속에 매몰된 구의 맨 밑바닥점까지의 깊이는 $h=R$ 로 된다.(R 는 구의 반경) 구의 온도가 $t>t_0$ 일 때는 $h>R$ 이므로 녹은 얼음의 체적은 반구의 체적과 어떤 원기둥의 체적의 합으로 된다.(그림 2-11-5의 ㄱ) 알루미늄의 밀도를 ρ_{Al}, 비열을 c, 얼음의 밀도를 ρ, 얼음의 비녹음열을 λ 로 표시하면 알루미늄의 온도가 t ℃로부터 0℃까지 랭각될 때 방출되는 열량은

$$Q_1=\frac{4}{3}\pi R^3\rho_{\mathrm{Al}}ct$$

로 된다. 얼음이 녹으면서 흡수한 열량 Q_2 은

$$Q_2=\rho\left[\pi R^2(h-R)+\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi R^3\right]\lambda$$

이 과정에 얼음을 제외한 외부계에로의 열방출을 무시하면 $Q_1=Q_2$ 이므로

$$h=\frac{4Rc}{\lambda}t+\frac{1}{3}R$$

즉 h 는 t 가 클수록 커지게 된다. 그러나 이 식은 $t>t_0$ 일 때만 성립된다. 표에 준 수값들을 문제와 함께 준 방한지상에 표시하면 1~8차에 해당한 실험점들이 A, B, …, H 등으로 표시된다.(그림 2-11-5의 ㄴ) 여기서 B, C, D, E, F 다섯개의 점들은 기본상 직선을 이루고있다. 결국 이 직선이

$$h=\frac{4Rc}{\lambda}t+\frac{1}{3}R$$

로 되여야 한다. 그러므로 이 직선우에서 임의의 두 점을 택하고 해당한 수값을 찾아 각각 우의 식에 넣고 련립하면 비열 c를 구할수 있다. 례를 들어 이 직선우에서 비교적 먼 거리에 떨어져있는 가로축 8과 100에 해당한 두 점을 택하면 이 점들은 $x_1(8,\ 5.1)$, $x_2(100,\ 16.7)$ 이다. 이 수값들을 각각 우의 식에 넣고 R 를 없애면

$$c=8.6\times10^2\mathrm{J/(kg\cdot{}^\circ C)}$$

2) 측정값들중에서 1, 7, 8 차에 해당한 자료들은 리용하지 말아야 한다. 이에 해당한 점들은 A, G, H 이다. 그러면

A 점이 왜 예상되는 직선으로부터 크게 편기되겠는가?

$h \approx R$ 인 경우에 식 $h = \frac{4Rc}{\lambda} t + \frac{1}{3} R$ 에 따르는 온도 $t_0 = 65$℃이다. 그런데 이 식은 $t > t_0$ 일 때에만 성립한다. 1 차실험에서 시편의 온도가 $t_1 = 55$℃ $< t_0$ 이므로 녹은 얼음의 체적이 반구의 체적보다 작다. 때문에 우의 식이 성립되지 않는다. 다음 G, H 점들은 왜 이 직선으로부터 편기되였는가? 시편의 온도가 너무 높으면(120℃, 140℃) 얼음의 일부가 승화되여 증기로 변할뿐만아니라 시편과 주위환경의 온도차가 심하므로 열손실량이 커진다. 따라서 우의 식이 성립되지 않게 된다.

ㄱ)

ㄴ)

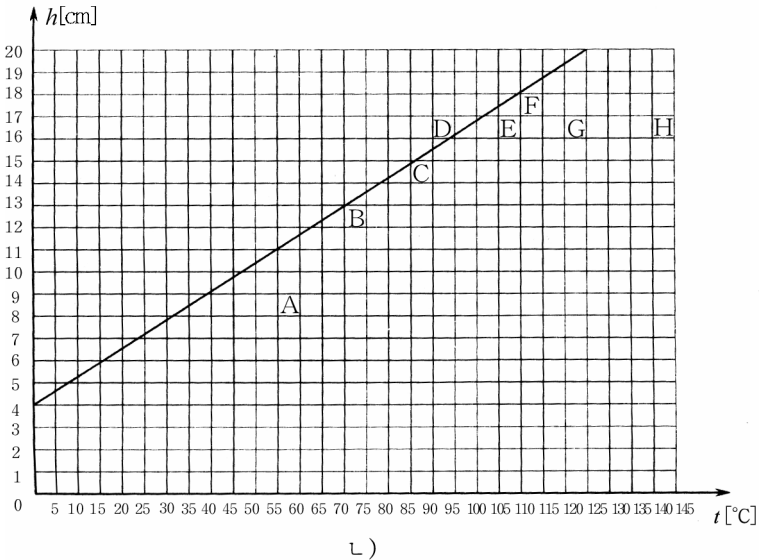
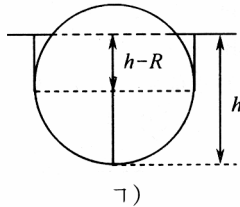



그림 2-11-5

제12장. 전기마당

1. 2)

   풀이방향. 전력선은 +전하로부터 시작하여 −전하에서 끝난다는 것을 알고있다. a, b는 서로 다른 부호의 전하이다. 전력선의 분포로부터 전력선은 일정한 전기량에 대응한다. 여기로부터 a의 전기량은 b의 전기량보다 작다.

2. $2mg + qE$

   풀이방향. 두 대전된 구를 하나의 계로 보고 문제를 고찰하면 쉽게 풀수 있다.

3. $k = \dfrac{q}{(R + l/2)^2}$

   풀이방향. 정전기적평형상태에 놓여있는 도체는 그 내부의 전기마당의 세기가 령이므로 도체내부의 임의의 점에서 생겨난 전하와 그 유도전하가 이 점에 만드는 전기마당의 세기의 크기는 서로 같고 방향은 반대이다.

4. 작은 물체가 받는 전기마당에 의한 힘은 $F = -qE$ 이다. 크기는 변하지 않고 방향도 벽의 방향을 가리킨다. 마찰력 f의 방향과 작은 물체의 운동방향은 반대로 된다. x축을 따라 운동을 시작한 작은 물체는 여러번 벽과 충돌한 후 마지막에 원점 O에 도달한다. 이 과정에 전기에네르기는 $\Delta\mathscr{E} = qEx_0$ 만큼 감소된다. 작은 물체의 운동에네르기는 $mv_0^2/2$ 으로 감소된다. 물체가 벽과 충돌할 때 력학적에네르기손실은 없으므로 작은 물체가 마찰력을 극복하는데 소비하는 에네르기는 감소된 운동에네르기와 전기에네르기의 합

   $$f\,S = \frac{1}{2}mv_0^2 + qEx_0$$

   과 같다. 이로부터 작은 물체가 멎을 때까지 지나간 총 운동거리는 $S = \dfrac{2qEx_0 + mv_0^2}{2f}$ 이다.

5. 1) 전자가 두 평행극판사이를 통과하는 시간은 $l/v \approx 10^{-9}$s이고 교류전압의 주기는 $T \approx 10^{-2}$s이므로 $l/v \ll T$ 라고 볼수 있다. 이로부터 전자가 두 평행극판사이를 통과할 때 극판사이의

전압과 마당의 세기가 변하지 않는다고 볼수 있다. 전자가 평행극판의 가운데선을 따라 입사한 후 수평방향을 따라 등속운동을 하며 수직방향을 따라 등가속운동을 한다. 전자묶음이 두 평행극판사이를 통과할수 없는 전압을 U_C 라고 하고 전자가 평행극판을 지나가는 시간을 t, 마당으로부터 받는 힘을 f라고 하면

$$t = \frac{\ell}{v}, \quad \frac{d}{2} = \frac{1}{2} a t^2, \quad a = \frac{f}{m} = \frac{eU_C}{md}$$

이상의 3개식으로부터 $U_C = \frac{mv^2 d^2}{el^2}$ =91V이다.

2) $(\Delta t)_{통} = 2(\Delta t)_{중단}$

그러므로 $U_C = U_0 \sin\frac{\pi}{3}$, $U_0 = \frac{91}{\sqrt{3}/2} = 105(\mathrm{V})$

6. 1) 전자가 첫번째 $T/2$ 내에 도착하여야 가장 큰 운동에네르기를 가진다.

$$d = \frac{\varphi_0 k t^2}{2d}, \quad t \le \frac{T}{2} \quad \rightarrow \quad T \ge 2d\sqrt{\frac{2}{\varphi_0 k}}$$

2) $T = 2d\sqrt{\frac{2}{\varphi_0 k}}$ 때 $T/2$ 시간동안 전자의 위치이동은 대체로 d 이므로 $T/4$ 시간내에 전자가 등가속운동한 거리는 $d/4$ 이고 등감속운동으로 $T/4$ 시간동안 운동한 거리는 $d/4$ 이고 그 다음 반대로 운동하기 시작한다. 그리하여 전자가 B판을 때린다.

7. 1) 운모를 끼운 후 축전기의 전기용량은 공기가 차있는 부분의 축전기와 운모가 차있는 부분의 축전기가 병렬련결되였을 때의 전체 축전기전기용량과 같다고 볼수 있다.

공기부분의 축전기용량은

$$C_1 = \frac{S/2}{4\pi k d} = \frac{C_0}{2}$$

운모부분의 축전기용량은

$$C_2 = \frac{\varepsilon S/2}{4\pi k d} = \frac{\varepsilon C_0}{2}$$

따라서 축전기용량은 $C = C_1 + C_2$ 여기에 수값을 넣으면

$$C = 60\text{pF}$$

2) 전원이 공급하는 에네르기 W는 전원의 전동력과 전원을 통해 흐르는 전기량의 적과 같다. 운모를 끼우기 전 극판사이의 전기량은 Q_0이고 끼운 후에는 Q이다. 따라서 $W = \mathscr{E}(Q - Q_0)$ 이다. 또한 $Q_0 = C_0\mathscr{E}$, $Q = C\mathscr{E}$ 이므로 $W = \mathscr{E}^2(C - C_0)$ 이다. 수값을 넣으면 $W = 5\times10^{-6}\text{J}$

8. 1) 전기마당이 없을 때 중력, 뜰힘, 끈기힘에 의하여 기름방울은 등속으로 아래로 떨어진다. 이때 $F_{중} - F_{뜰} = F_{끈}$

즉
$$\frac{4}{3}\pi r^3 g(\rho_2 - \rho_1) = 6\pi\eta r v_1$$

이로부터
$$r = \sqrt{\frac{9\eta v_1}{2(\rho_2 - \rho_1)g}}$$

2) 전기마당이 있을 때 중력, 뜰힘, 끈기힘에 의하여 기름방울은 등속으로 우로 오른다. 이때 $F_{전} = F_{중} - F_{뜰} + F_{끈}$

따라서
$$qE = \frac{4}{3}\pi r^3 g(\rho_2 - \rho_1) + 6\pi\eta r v_2$$

우의 식과 련립하여 풀면

$$q = 9\sqrt{2}\pi \cdot \frac{v_1 + v_2}{E}\sqrt{\frac{\eta^3 v_1}{(\rho_2 - \rho_1)g}}$$

9. $t = 0$에서 시작할 때 A판의 전위가 B판보다 높으므로 전자는 B판에 있다가 전기마당의 작용으로 A판을 향해 운동한다. 교류전압의 첫 반주기동안 전압은 변하지 않으므로 전자는 등가속직선운동을 하고 그 운동에네르기는 계속 커진다. 만약 주파수가 높다면 전자는 A판에 도달하기 전에 교류전압의 다음 반주기에 의해 반대방향으로 운동한다. 즉 전자는 원래방향에서 등감속직선운동을 하고 다시 반주기 지난 후에 그 운동에네르기가 0으로 되며 다시 등가속운동을 한다. 반주기 지난 후 또 감속운동을 하면서 마지막에는 A판에 도달한다. 등감속운동과정에 전자의 운동에네르기는 감소된다. 따라서 전자가 A판에 도달할 때 가지게 되는 최대운동에네르기를 구하자면 전압의 크기가 주어진 조건에서 전자는 B에서 A로 갈 때 시종일관 가속운동을 해야 한다. 이것은 교류전압의 반주기가 전자가 B판에서 A판으로 가속운동하는데 필요한 시간보다 작지 말아야 한다. 즉 주파수는 어떤 값보다 클수 없다. 전기마당의 작용에 의한

전자의 가속도는 $a = eU_0/(md)$ 이다. 여기서 e 와 m는 각각 전자의 전기량의 크기와 질량이다. t를 전자가 B에서 A에 도달하는데 필요한 시간이라고 하면 $d = at^2/2$ 이다. T를 교류전압의 주기, ν 를 주파수라고 하면 우에서 고찰한데 의하여 다음과 같은 요구를 만족해야 한다. 즉

$$t \le \frac{T}{2}, \qquad \nu \le \frac{1}{2t}$$

우의 세 식으로부터 $\nu \le \sqrt{\dfrac{eU_0}{8md^2}}$

즉 주파수는 $\sqrt{\dfrac{eU_0}{8md^2}}$ 을 넘을수 없다.

10. 1) 완전히 꼭같이 대전된 반구면이 주어진 반구면의 밑에 있어 하나의 완전한 구면을 형성한다고 하자.(그림 2-12-1) 즉 구면 및 내부의 매 점의 전위는 같다고 한다. 그것을 U으로 표시하면 대칭성에 따라 우와 아래 반구면이 원둘레 A, B, C, D점에 만드는 전위는 같다. 전위중첩의 원리에 따라 웃 반구면만 있을 때 원둘레 A, B, C, D점의 전위는 완전구면일 때 전위의 절반이다. 즉 $U/2$ 이다. 따라서 점전하를 E점에서 A점까지 이동할 때 외부힘이 수행한 일은 령이다.

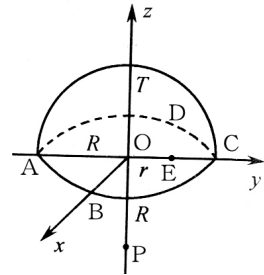



그림 2-12-1

2) 완전구면에 대해서는 E점과 T점은 같은 전위를 가지므로 전위차는 령이다. 전위중첩의 원리로부터 웃반구면이 T와 E 두 점에 형성하는 전위차는 $(U_T - U_E)$ 이면 아래 반구면이 T와 E점에 형성하는 전위차는 $-(U_T - U_E)$ 이다. 따라서 아래반구면이 만드는 마당속에서 E에서 T로 q 를 옮겨갈 때 외부힘이 하는 일은 $-W$ 이며 웃반구면이 만드는 마당속에서 E에서 P로 q 를 옮겨갈 때 외부힘이 하는 일은 $-W$ 이다.

11. 1) 물방울의 전기량이 $q = C_2U_0$, P_2에 걸린 전압이 U_1 일 때 물방울이 받는 힘들은 평형상태를 이루므로

$$mg = qE = q \cdot \frac{U_1}{h}$$

여기로부터 $$U_1 = \frac{mgh}{q} = \frac{mgh}{C_2 U_0}$$

2) n개의 물방울이 떨어진 후 의 P_2전위가 U_n 라고 하면

$$U_n = \frac{nq}{C_1} = \frac{nU_0 C_2}{C_1}$$

이때 n+1번째 물방울이 받는 전기마당의 힘은

$$F = qE_n = q \cdot \frac{U_n}{h} = \frac{nU_0^2 C_2^2}{C_1 h}$$

n+1번째 물방울의 가속도는

$$a = \frac{mg - F}{m} = g - \frac{nU_0^2 C_2^2}{mC_1 h}$$

이로부터 P_2에 도착하기 전의 속도는

$$v = \sqrt{2ah} = \sqrt{2gh - \frac{2nU_0^2 C_2^2}{mC_1}}$$

12. 스위치 K를 닫았을 때 축전기의 전압은 일정하며 전동력 $\mathscr{E}$과 같다. B판이 평형자리에 도달하였을 때 자리는 $-x$이다. 이때 축전기의 두 극판사이의 전기량은

$$q_1 = C_1 \mathscr{E} = \frac{S\mathscr{E}}{4\pi k(d - x_1)}$$

여기서 S는 축전기극판의 면적이다. 축전기의 두 극판사이의 전기마당의 세기는 $E_1 = \dfrac{\mathscr{E}}{d - x}$ 이며 한개 극판이 만드는 전기마당의 세기는 E_1의 절반과 같다. 따라서 B판에 작용하는 힘은

$$\frac{E_1 q_1}{2} = \frac{S\mathscr{E}^2}{8\pi k(d - x_1)^2} = k' x_1'$$

여기서 k' 는 튐성결수이다. 다시 스위치 K를 닫았다가 열 때 축전기에 쌓이는 전기량은 $q_2 = \dfrac{S\mathscr{E}}{4\pi\pi d}$ (판은 미처 운동할 사이가 없다.) 전기량이 q_2 로 보존된다면 새로운 평형자리에서 B판이 움직인 거리를 x_2 라고 할 때 축전기의 두 극 판사이의 전기마당의 세기는

$$E_2 = \frac{q}{C_2(d - x_2)}$$

여기서 $C_2 = \dfrac{S\mathscr{E}}{4\pi k(d - x_2)}$ 이며 이로부터 B판이 받는 힘은

$$\frac{E_2 q_2}{2} = \frac{S\mathscr{E}^2}{8\pi k\, d^2} = k' x_2'$$

이 두 경우를 고려하면

$$x_2 = x_1 \left(\frac{d - x_1}{d} \right)^2$$

$x_1 = 0.1d$라고 하면 $x_2 = 0.08d$로 된다.

13. 문제를 푸는데서 기본은 원고리우에서의 전하분포와 구면우에 균일하게 분포된 전하분포를 서로 련관시키는데 있다. 전기량 Q가 구면우에 균일하게 분포되여있을 때 구안에서의 전기마당의 세기는 령이다. 전기마당중첩의 원리로부터 직경 AOB우의 매 점에서의 전기마당의 세기를 고찰하여보자. AOB에 수직인 평행평면들로 구면을 자르면 작은 구면띠들이 생기게 될것이다.(그림 2-12-2)

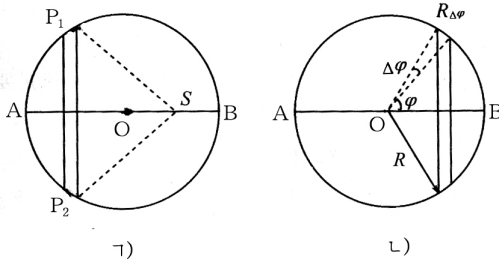



그림 2-12-2

어떤 한 구면띠에서 서로 대칭인 위치에 있는 고리의 일부분 P_1, P_2이 AOB우의 임의의 점 S에 만드는 전기마당의 세기를 고찰할 때 AOB에 수직인 성분들은 대칭성때문에 서로 지워진다. 그러므로 이러한 대칭성을 고려하면 구면띠의 전체 전하가 S점에 만드는 전기마당의 세기는 그 전기량의 절반이 P_1에, 나머지 절반은 P_2에 모여있을 때의 전기마당의 세기와 같아지게 된다. 따라서 AOB우에서의 전기마당의 세기를 고찰할 때 전하

Q가 구면우에 고르롭게 분포되여있는 경우는 이 구면전하가 AOB를 직경으로 하는 원고리에 우에서와 같은 방법으로 모여있을 때의 경우와 같아지게 된다. 이렇게 전하가 분포된 고리인 경우에 그의 직경 AOB우에서의 전기마당의 세기는 령으로 된다. 전하 Q가 구면우에 고르롭게 분포되여있을 때 면전하밀도는

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

이다. AOB에 수직인 무한히 가까운 두개의 평행인 평면으로 이 구면을 자르면 좁은 구면띠들이 생긴다. 이 구면띠는 그림에서 각 φ에 의해 결정된다. 작은 구면띠의 면적은

$$\Delta S = 2\pi R^2 \cdot \sin\varphi \cdot \Delta\varphi$$

이고 전기량은 $\Delta Q = \sigma \Delta S$ 이다. 따라서 φ 위치에 있는 고리요소에서의 선전하밀도는

$$\lambda(\varphi) = \frac{\Delta Q}{2R \cdot \Delta\varphi} = \frac{Q}{\Delta R} \cdot \sin\varphi$$

로 된다.

14. 작은 구가 두 전하의 작용을 받아 등속원운동을 하며 그때 합력의 크기는 일정하고 방향은 항상 원의 중심을 향한다.(그림 2-12-3) 이때 구에 작용하는 원둘레의 접선방향에서의 분력의 크기는 같고 방향은 반대여야 한다.

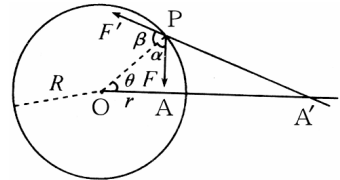



그림 2-12-3

그림에서 보여준것과 같이 $A'O = x$로 하고 A점과 A′점의 전하가 점 P에 작용한 힘의 크기를 각각 F와 F'라고 하면

$$F\sin\alpha = F'\sin\beta$$

이고 시누스정리로부터

$$\frac{\sin\alpha}{r} = \frac{\sin\theta}{\mathrm{PA}}, \qquad \frac{\sin(\pi-\beta)}{x} = \frac{\sin\theta}{\mathrm{PA'}}$$

웃식으로부터

$$F \cdot r \cdot \mathrm{PA'} = F' \cdot x \cdot \mathrm{PA}$$

꿀롱의 법칙에 의하면

$$F = k\frac{Qq}{(\mathrm{PA})^2}, \qquad F' = k\frac{Qq'}{(\mathrm{PA}')^2}$$

이로부터

$$\frac{q\,r}{(\mathrm{PA})^3} = \frac{q'r}{(\mathrm{PA}')^3}$$

이 식은 점 P가 원둘레우의 임의의 점에 있을 때에도 성립하여야 한다. 특수한 경우 즉 Q=0일 때 $\mathrm{PA} = R - r$, $\mathrm{PA}' = x - R$ 이며 $\theta = \pi$ 일 때 $\mathrm{PA} = R - r$, $\mathrm{PA}' = x - R$ 이다. 이 값을 웃식에 넣고 정리하면

$$\left(\frac{R-r}{R+r}\right)^3 = \left(\frac{x-R}{x+R}\right)^3$$

이로부터

$$x = \frac{R^2}{r} \qquad \text{혹은} \qquad x = r$$

여기에 대응하는 전하는

$$q' = -\frac{R}{r}q, \qquad q' = q$$

이다.

제13장. 전기회로

1. 1)

풀이방향. 전압계의 내부저항이 회로에 주는 영향을 고려하여라. 다시말하여 전압계를 회로에 련결한 후 전압계와 병렬련결한 저항이 작아져 분압효과가 떨어지게 되는데 이에 따라 제시된 문제를 고찰하면 된다.

2. 3)

풀이방향. 문제의 그림에서 미끄럼단자를 a쪽으로 이동시킬 때 R_5 의 저항이 작아지며 회로의 전체 저항은 작아진다. 이로부터 닫긴회로의 옴의 법칙, 직렬회로의 분압관계와 병렬회로의 분류관계로부터 전압, 전류의 변화관계를 판단할수 있다.

3. 1) $I = \dfrac{\mathscr{E}}{R_1 + R_2} = 1\text{A}$

2) 스위치를 열기 전 축전기의 전압은 IR_2, 충전된 전기량은 $q_1 = CIR_2$ 이다. 스위치를 열고 안정된 후 축전기전압은 $\mathscr{E}$, 충전된 전기량은 $q_1 = C\mathscr{E}$, R_1를 지나는 총전기량은 $\Delta q = C(\mathscr{E} - IR_2) = 1.2\times10^{-4}\text{C}$이다.

4. 1) 측정할 때의 전기회로도는 생략한다.

2) 임의의 전압계 례를 들어 두개의 전압계 A와 B중에서 A를 전원과 련결하고 계기에 표시되는 값을 U_A 라고 한다. 다시 두개의 전압계 A와 B를 전원과 직렬로 련결하고 계기에 표시되는 전압을 각각 U'_A 와 U_B 라고 한다. A의 내부저항을 R_A , B의 내부저항을 R_B , 전원의 내부저항을 r, 전원의 전동력을 $\mathscr{E}$, 전압계 A를 전원과 련결하였을 때 전류의 세기를 I_1 , 두 전압계가 전원과 직렬로 련결되였을 때 전류의 세기를 I_2 이라고 하면 옴의 법칙으로부터

$$\mathscr{E} = I_1(R_\text{A} + r), \quad \mathscr{E} = I_2(R_\text{A} + R_\text{B} + r)$$

$$U_\text{A} = I_1R_\text{A}, \quad U'_\text{A} = I_2R_\text{A}, \quad U_\text{B} = I_2R_\text{B}$$

이로부터 $$\mathscr{E} = \frac{U_\text{A}\,U_\text{B}}{U_\text{A} - U'_\text{A}}$$

5. 문제의 조건으로부터 매 전지의 전동력과 최대허용전류를 알고 있는데 전기기구의 사용전압과 작업전류보다 작으므로 전지를 여러개 묶어서 전원을 보장해야 한다.

1) n개의 전지를 직렬로 련결하면 매 전지로 흐르는 최대전류의 세기는 $I_1 = 2\text{A}$이다. 다시 m개의 전지조를 $I = 4\text{A}$가 만족되도록 병렬로 련결한다. 여기서 1개의 전지조는 n개의 전지를 직렬로 련결한것이다. 이때 $I = mI_1$ 즉

$$I = \frac{mn\mathscr{E}}{mR + nr}$$

이미 알고있는 수값들을 넣으면 $m = 2$(조), $n = 10$(개)

2) 매 전지로 흐르는 전류의 세기가 $I_1 = 2\text{A}$이므로

$$P_{\text{출}} = I_1\mathscr{E} - I_1^2 r = 2\times1.5 - 2^2\times0.2 = 2.2(\text{W})$$

3) 전지조의 효률

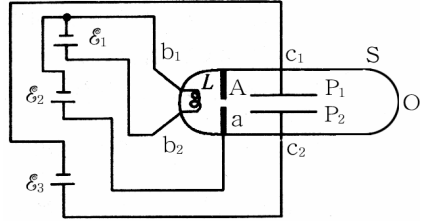
$$\eta = \frac{IU}{I\mathscr{E}_{총}} \times 100 = \frac{U}{n\mathscr{E}} \times 100 = \frac{11}{10 \times 1.5} \times 100 = 73.3(\%)$$

6. 1) 매개 전원의 련결선은 그림 2-13-1과 같다.

2) 가속전압을 U_2, 전자가 가속되여 작은 구멍을 지난 후의 속도를 v라고 하면

$$\frac{1}{2}mv^2 = eU_2$$

그림 2-13-1

전자가 O점에 부딪치게 하려면 P_1와 P_2사이에 적당한 전압 U_3 을 걸어주어야 한다. 이때 전자가 받는 전기힘과 로렌쯔힘이 평형을 이루므로

$$\frac{eU_3}{d} = eBv$$

우의 두 식으로부터 $$\frac{e}{m} = \frac{U_3^2}{2U_2B^2d^2}$$

7. 1) 대전된 기름방울이 전기마당속에서 평형상태에 놓여있을 때 기름방울이 받는 힘을 분석하면 중력은 아래로, 전기힘은 우로 향한다.

2) 저항 R_3 과 평행금속판을 병렬로 련결하면 저항 량끝과 금속판 량끝에서의 전압은 서로 같다. 전압은

$$U = Ed = 1\ 400 \times 1.5 \times 10^{-2} = 21(\text{V})$$

두 저항 R_2 과 R_3 을 직렬로 련결하면 매 저항에 흐르는 전류는 같다.

$$I_2 = I_3 = \frac{U}{R_3} = \frac{21}{35} = 0.6(\text{A})$$

B점의 전위는 R_2, R_3 에서 떨어져 령으로 된다.(접지) 따라서

$$U_B - I_2R_2 - I_3R_3 = 0 \quad \rightarrow \quad U_B = 0.6 \times 10 + 21 = 27(\text{V})$$

3) 저항 R_1 의 두 끝의 전압이 27V, R_1 에서 전류의 세기는

$$I_1 = I - I_2 = 1.5 - 0.6 = 0.9(\text{A})$$

이다. R_1 에서 발생하는 열량은

$$Q = IU_1t = 0.9 \times 27 \times 10 = 243(\text{J})$$

4) R_3 의 저항값을 조절할 때 회로에 흐르는 전류의 세기와 전압은 그에 따라 변하므로 변화량을 알아야 문제를 풀수 있

다. 전원의 전동력 $\mathscr{E}$은 이미 알고있으므로 먼저 전원의 내부저항을 구하여야 한다. 옴의 법칙으로부터

$$r=\frac{\mathscr{E}-U_{외}}{I}=\frac{30-29}{1.5}=2\,(\Omega)$$

이고 에네르기전환 및 보존법칙으로부터 전지조의 출력이 62.5W일 때 전류의 세기를 I'라고 하면

$$P_{출}=I'\mathscr{E}-I'^2r, \qquad 62.5=I'\cdot 30-I'^2\cdot 2$$

이다. 풀이를 구하면 $I_1'=2.5\text{A}$, $I_2'=12.5\text{A}$(버린다)

다시 옴의 법칙으로부터 외부회로의 총저항 R'는 $I_2'=\dfrac{\mathscr{E}}{R'+r'}$

즉 $$R'=10\Omega$$

이로부터 $R_1=\dfrac{U_1}{I_1}=\dfrac{27}{0.9}=30\,(\Omega)$

$\dfrac{1}{R'}=\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2+R_3'}$ 로부터 구하면 $R_3'=5\,\Omega$ 이다. 그러므로 R_3의 저항값을 5Ω으로 조절하면 전지조의 출력은 62.5W이다.

8. 가능성. 조건이 아래와 같을 때 R_1과 R_2은 각각 A와 B의 전기저항을 표시하며(저항은 온도에 따라 변하지 않는다고 가정한다.) 문제로부터 알수 있는 바와 같이

$$R_1=\frac{10^2}{20}=50\,(\Omega), \qquad R_2=\frac{10^2}{5}=20\,(\Omega)$$

A가 전원에 접지되였을 때 정격출력 P_1의 요구에 부합되므로

$$P_1=\left(\frac{\mathscr{E}}{R_1r}\right)^2R_1=2\text{W}$$

B를 바꾸었을 때 B의 실지소모전력은

$$P_2=\left(\frac{\mathscr{E}}{R_2+r}\right)^2R_2$$

$P_2<2\text{W}$를 요구하므로 웃식으로부터

$$r>10\sqrt{10}\ \Omega, \qquad \mathscr{E}>10+\frac{r}{5}$$

로 된다.

9. $I_1=10\text{mA}$, $I_2=2.5\text{mA}$, U_1=2V, 전류계의 내부저항 R_A, 전압

계의 내부저항 R_V, 전원의 전동력을 $\mathscr{E}$이라고 하면 분압관계식으로부터

$$U_1=\frac{\frac{R_V\cdot R_x}{R_V+R_x}}{\frac{R_V\cdot R_x}{R_V+R_x}+R_A}\mathscr{E}=\frac{R_VR_x\mathscr{E}}{R_VR_x+R_xR_A+R_AR_V}$$

R_x를 전압계와 분리시키고 전류계와 병렬로 련결한 후 전류계 량끌의 전압은

$$U_A=I_2R_A=\frac{\frac{R_AR_x}{R_A+R_x}}{\frac{R_AR_x}{R_A+R_x}+R_V}\mathscr{E}=\frac{R_A R_x\mathscr{E}}{R_V R_x+R_A R_x+R_A R_V}$$

우의 두 식을 서로 나누면 전압계의 내부저항은

$$R_V=\frac{U_1}{I_2}=8\times10^2\Omega$$

이다. R_x를 전압계와 병렬로 련결하면 전압계에 흐르는 전류의 세기는

$$I_V=\frac{U_1}{R_V}=2.5\text{mA},\qquad R_x=\frac{U_1}{I_1-I_V}=267\,\Omega$$

10. 먼저 전원이 구의 량극에 그림 2-13-2와 같이 련결된 간단한 경우를 고찰하자. 이때 《적도선》에서 거리 Δl인 작은 구간 사이를 지나는 전류의 세기는

$$i=\frac{I_0\,\Delta l}{2\pi R}$$

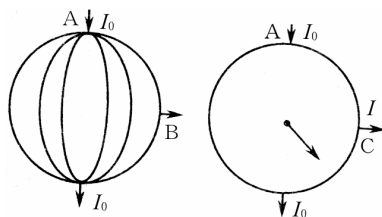



그림 2-13-2

이다. 이제 두개의 전원을 구에 련결하되 한개는《량극》사이, 다른 한개는《적도선》 C점과 그 대칭점에 련결한다. C점에서 전류의 세기는 두개의 서로 수직방향으로 흐르는 전류의 세기의 대수적합과 같다. 그러나 이 전류의 세기는 구하려는 전류의 세기의 2배와 같다. 그러므로 마지막에 얻어지는 구면우의 주어진 두 점사이의 전류의 세기는

$$I=\frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{I_0}{2\pi R}\frac{R}{1\,000}=\frac{\sqrt{2}}{4\,000\pi}I_0$$

이며 방향은《적도선》과 45°를 이룬다.

11. 가변저항의 제일 웃끝점 M에서 아래점 P에로 미끄럼단자를 움직일 때 축전기의 충전전압은 점차적으로 감소한다. 축전기의 전기량도 감소한다. 축전기가 방전할 때 검류계 G를 지나는 전류의 방향은 b에서 a이며 가변저항의 미끄럼단자를 M에 있을 때 축전기의 충전전압과 전기량은 각각

$$U_0=\frac{R}{R+r}\mathscr{E},\qquad Q_0=\frac{CR}{R+r}\mathscr{E}$$

이다. t시간이 지난 후 가변저항의 미끄럼단자가 어떤 위치에 있다고 하면 저항은 R_1과 R_2로 나눌수 있다. 이 두 부분의 저항값이 저항의 전체 길이에 정비례하므로

$$R_1=\frac{R}{l}vt,\qquad R_2=R-R_1=R\left(1-\frac{v}{l}t\right)$$

축전기의 충전전압은 R_2의 전압과 같으므로

$$U_t=\frac{R_2}{R+r}\mathscr{E}=\frac{R\mathscr{E}}{R+r}\left(1-\frac{v}{l}t\right)$$

이다. 축전기의 전기량은 축전기용량과 전압에 의하여 결정되므로

$$Q_t=CU_t=\frac{CR\mathscr{E}}{R+r}\left(1-\frac{v}{l}t\right)$$

검류계 G를 지나는 전류세기는 축전기극판사이의 방전속도에 의하여 결정된다. 즉

$$I_t=\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\frac{Q_0-Q_t}{t}=\frac{CR\mathscr{E}v}{(R+r)l}$$

그러므로 방전전류는 항상 일정하다. 수값을 넣으면 $I_t=3\mu\text{A}$

12. 1) 2극소자의 량끝단자에 걸린 전압을 U_{D}, 2극소자를 지나는 전류의 세기를 I_{D}라고 하면

$$2U_{\text{D}}=\mathscr{E}-\left(I_{\text{D}}+\frac{2U_{\text{D}}}{R_2}\right)R_1$$

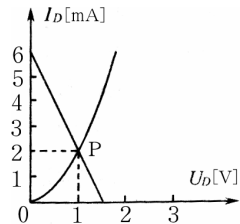



그림 2-13-3

이다. 수값을 넣으면 $U_D=(1.5-0.25I_D\times10^3)$V 이다. 이것은 그림 2-13-3에서와 같이 가로축으로는 1.5V, 세로축으로는 6mA를 지나는 경사도가 −4인 직선으로 나타나게 된다.(2극소자의 부하선이라고 부른다.) U_D, I_D 가 2극소자에 의한 전압제한을 받으므로 2극소자는 부하선과 전압곡선의 사귐점 P에서 동작한다. 이때 2극소자의 량끝전압과 전류의 세기는 각각 $U_D=1$V, $I_D=2$mA이다.

2) 저항 R_1 에서의

전압은 $U_1=\mathscr{E}-2U_D=4\text{V}$

전력은 $P_1=\dfrac{U_1^2}{R_1}=16\text{mW}$

13. 닫긴면으로 들어오는 전류값은 나가는 전류값과 같다. 문제에서 제시한 회로에서 구하려는 전류값이 있는 회로가 그림 13-4와 같이 닫긴면 S로 둘러싸였다고 생각하자.

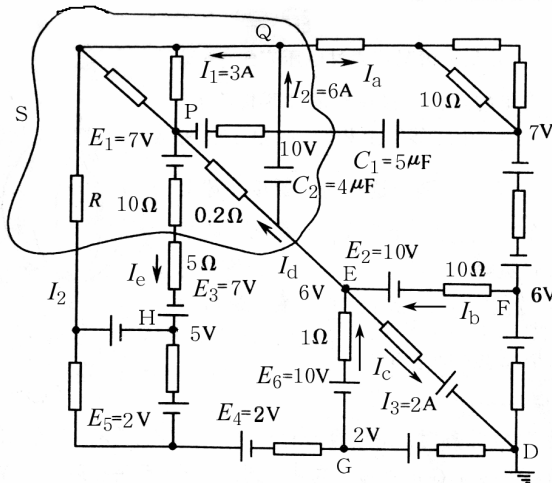



그림 2-13-4

이 닫긴면에 의하여 잘리우는 회로의 전류값은 I_a, I_d, I_e, 와 I_x 이고 전류 I_a, I_b, I_c, I_d, I_e 와 I_x 의 전류방향은 그림과 같다. 전류값들을 다음과 같이 계산한다.

그림에서 Q점은 $I_a=I_2-I_1=3$A이다.

I_b 를 구하기 위하여 전원을 포함하고있는 FE부분회로를 고찰하자.

$$\varphi_E-\varphi_F=E_2-I_b\times10=0\ \rightarrow\ I_b=1\text{A}$$

I_c 를 구하기 위하여 부분회로 EG를 고찰하자.

$$\varphi_E - \varphi_G = E_b - I_c \times 1 = 4V \rightarrow I_c = 6A$$

교차점 E에서는 $I_d = I_b + I_c - I_3 = 5A$이다. I_e 를 얻기 위하여 P점의 전위를 고찰하자.

$$\varphi_E - \varphi_P = I_d \times 0.2 = 1V$$

이로부터 P점의 전위는 $\varphi_P = 5V$이다. 전원을 포함하고있는 PH부분회로에서

$$\varphi_H - \varphi_P = (E_3 - E_1) - I_e(5+10) \rightarrow I_e = 10A$$

따라서 닫긴면 S에서

$$I_x = I_d - I_e - I_a = 5 - 0 - 3 = 3(A)$$

14. 처음 전류계에서 최대편기전류는 I_g[mA], 내부저항은 r[Ω], 1mA단자가 만족되는 관계식은

$$\frac{I_g}{I' - I_g} = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{r}$$

10mA단자가 만족되는 관계식은

$$\frac{I_g}{10 - I_g} = \frac{R_2 + R_3}{r + R_1}$$

100mA단자가 만족되는 관계식은

$$\frac{I_g}{100 - I_g} = \frac{R_3}{r + R_1 + R_2}$$

R_1 를 웃식에 넣고 R_2 과 R_3 을 없애면

$$I_g + r = 160$$

이것은 계기에서 I_g 와 r가 반드시 만족해야 할 관계식이다. 뿐만아니라 이 관계식을 만족하는 3개의 계기들은 정확한 값을 나타낼수 있다. 그러나 처음계기와는 내부저항값들이 같지 않다. 계기 B에 대해서는

$$I_g + r = 0.5(120 + 160) = 140 < 160$$

이므로 $I_g + r = 160$ 의 관계식이 성립되지 않는다. 만일 계기 B의 내부저항 r에 40Ω짜리 저항을 직렬로 련결하면 계기의 내부저항은 $r' = r + 40\,\Omega = 160(\Omega)$ 으로 되며 우의 관계식을 만족할수 있다. 즉 계기 B는 마사진 전류계를 대신하여 리용할수 있다.

제14장. 자기마당

1. $\dfrac{q^2B}{2\pi m}$

   풀이방향. 전하의 운동자리길에 수직인 자름면을 택하고보면 한 주기동안에 이 자름면을 통과하는 전기량이 q 이다. 운동주기를 고려하면서 등가전류를 구하면 된다.

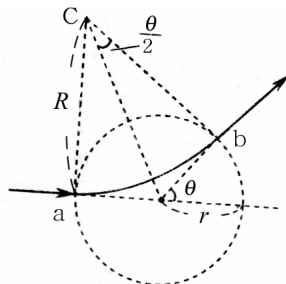
2. 3)

   풀이방향. 문제의 그림을 보면 립자가 부의 전기량을 띠고있다는것 그리고 $R=\dfrac{mv}{Bq}$ 로부터 두 립자들의 전기량과 질량의 비 $k(k=q/m)$ 가 $k_{\mathrm{I}}=2k_{\mathrm{II}}$ 로 된다는것을 알수 있다. 다음 양성자와 α 립자에서의 k값을 리용하여 확인해보면 1)과 2)가 틀린다는것을 알수 있다. 그다음 자기마당속에서 대전립자의 운동주기공식 및 가속도공식을 리용하면 3)의 경우가 옳다는것을 확인할수 있다.

3. $\dfrac{1}{2}mv^2-\dfrac{1}{2}qvBd$

   풀이방향. 서로 수직으로 사귀는 전기마당과 자기마당속에서 립자는 전기힘과 로렌쯔힘을 동시에 받게 된다. 이 두 힘이 평형을 이룰 때에만 립자가 마당구역을 등속직선운동하게 된다. 자기유도를 증가시키면 로렌쯔힘이 더 커지며 따라서 립자가 극판에 떨어질수 있다. 이 과정에 로렌쯔힘은 일을 수행하면서 립자의 운동에네르기를 변화시킨다. 이때 전기마당이 수행한 일이 립자의 운동경로에는 무관계하므로 립자가 극판에 떨어진 구체적위치에 관계없이 전기마당이 수행한 일을 통하여 립자의 운동에네르기를 계산할수 있다.

그림 2-14-1

4. 그림 2-14-1에서처럼 전자가 자기마당속에서 반경이 R 인 원둘레의 어떤 부분인 ab를 따라 운동한다고 보고(실제로 그렇게 움직인다.) 중심을 C,

반경을 R, 전자가 자기마당에 들어올 때의 속도를 v, 전자의 질량과 전기량을 각각 m, e로 표시하면

$$eU=\frac{1}{2}mv^2,\quad evB=\frac{mv^2}{R},\quad \tan\frac{\theta}{2}=\frac{r}{R}$$

로 된다. 이 식들로부터

$$B=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2mv}{e}}\tan\frac{\theta}{2}$$

5. 1) 동이온의 전기량을 e라고 하면 이 이온이 v의 속도로 구멍 S에 들어온 후 전기마당속에서 받게 되는 힘의 크기는 $F_1=eE$이며 그 방향은 아래쪽으로 향한다. 그리고 로렌쯔힘의 크기는 $F_2=evB$, 방향은 우로 향한다. 중력을 무시하면 $F_1=F_2$인 경우에만 동이온들이 편기없이 S'로 빠져나올수 있다. 따라서 동이온들이 구멍 S'로 빠져나올 조건은 $eE=evB$이다. 다시말하여 처음속도가 $v=\frac{F}{B}$인 이온들만이 S'로 나온다.

2) 이 이온들이 자기마당 B'로 들어온 후 받게 되는 로렌쯔힘은 $F=evB'$이다.(중력은 무시한다.) 이 힘의 방향은 속도 v의 방향과 수직이면서 그 값은 일정한 상수이다. 때문에 동이온은 자기마당속에서 등속원운동을 하게 되며 로렌쯔힘 F가 다름아닌 이 원운동에서의 향심력으로 된다. 질량수가 63, 65인 두 동이온의 자리길반경을 각각 R_1, R_2이라고 하면

$$evB'=m_1\frac{v^2}{R_1},\quad evB'=m_2\frac{v^2}{R_2}$$

따라서

$$R_1=\frac{m_1E}{eBB'},\quad R_2=\frac{m_2E}{eBB'}$$

수값들을 넣으면 $R_1=0.33\text{m}$, $R_2=0.34\text{m}$

6. 대전립자를 S점에서 출발시키면 두 원통사이에 걸린 전기마당에 의해 가속되면서 실틈 a를 통과한 후 자기마당속에서 로렌쯔힘을 받아 등속원운동을 하게 된다.(그림 2-14-2) 이 립자가 S점에 다시 돌아오려면 실틈 a를 빠져나온 립자가 원자리길을 따라 돌다가 실틈 b로 들어오면서 전기마당의 작용으로 감속되고 다

시 가속되여 실틈 b로 빠져나와야 한다. 그다음 꼭같은 과정으로 실틈 c, d를 거쳐야 실틈 a로 다시 들어와 S점에 도착하게 된다. 처음에 립자가 실틈 a를 빠져나와 자기마당속으로 들어갈 때의 속도를 v라고 하면 에네르기보존법칙에 의해

그림 2-14-2

$$\frac{1}{2}mv^2 = qv$$

로 된다. 그다음 로렌쯔힘에 의해 진행되는 등속원운동의 반경을 R라고 하면 로렌쯔힘의 공식과 뉴톤의 법칙으로부터

$$m\frac{v^2}{R} = qvB$$

로 된다. 이 립자가 S위치로 다시 돌아오려면 그림에서 알수 있는것처럼 이 립자가 a틈으로부터 b틈까지 운동하는 동안 바깥원통의 반경과 같은 반경을 가진 원의 3/4만큼 원운동을 해야 한다. 따라서 이 원운동자리길의 반경 R 는 r_0과 같아야 한다. 이로부터

$$U = \frac{qr_0^{\,2}B^2}{2m}$$

7. 1) 자기마당속에서 립자들의 운동자리길반경을 R 라고 하면 뉴톤의 제2법칙에 의해

$$qvB = \frac{mv^2}{qB}$$

으로 되며 따라서

$$R = \frac{mv}{qB}$$

2) 그림 2-14-3에서와 같이 OP를 활줄로 하면서 반경이 같은 두개의 원을 그리면 P점에서 만나는 두 립자의 운동자리길을 그릴수 있다. 이 두 원의 중심들과 직경들을 각각 O_1, O_2, OO_1Q_1,

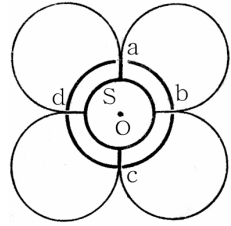
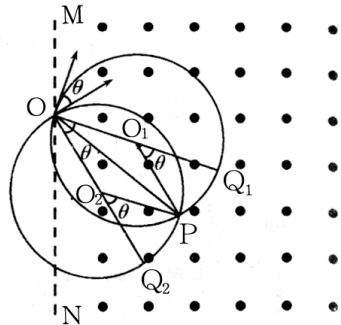



그림 2-14-3

OO_2Q_2로 표시하면 O점으로부터 이 두 원에 그은 접선방향들을 각각 두 립자의 입사방향을 표시한다.(그림에서 두개의 화살부호) 이 방향들사이의 각을 θ라고 하자.

그러면 기하학적관계에 의해 $\angle PO_1Q_1 = \angle PO_2Q_2 = \theta$, 립자 1의 자리길은 이 원둘레길이의 절반보다 $Q_1P = R\theta$만큼 길며 립자 2의 운동자리길은 $Q_2P = R\theta$ 만큼 짧다. 립자의 등속원운동주기를 T라고 하면 두 립자의 운동시간은 각각

$$t_1 = \frac{T}{2} + \frac{R\theta}{v}, \quad t_2 = \frac{T}{2} - \frac{R\theta}{v}$$

로 되며 따라서 출발시간차는

$$\Delta t = t_1 - t_2 = 2\frac{R\theta}{v}$$

이다. 한편

$$R \cdot \cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}, \quad \theta = 2\cos^{-1}\frac{L}{2R}$$

이므로

$$\Delta t = \frac{4m}{qB}\cos^{-1}\left(\frac{LqB}{2mv}\right)$$

8. 고리가 정지하고있을 때 고리에서의 전기마당의 세기는 령이 아니므로 대전된 전하들은 힘을 받고있으며 따라서 고리에는 이미 장력이 걸려있다. 고리를 회전시키면 전하들이 고리와 함께 운동하면서 전류를 형성하게 된다. 때문에 이 고리의 매개 부분들이 자기마당때문에 생기는 자기힘을 받게 되는데 이 힘의 방향은 반경방향을 따라 바깥쪽으로 향한다. 이 힘과 고리의 요소부분 량쪽으로 생기는 장력의 합력이 바로 고리요소부분이 원운동하는데서 향심력의 역할을 한다.(그림 2-14-4) 고리요소부분의 길이를 Δl, 질량을 Δm 고리량끝점들에서 고리의 중심을 바라보는 각을 $\Delta\theta$, 자기힘을 F, 부가된 장력을 T라고 하면 등속원운동조건으로부터

$$2T\sin\frac{\Delta\theta}{2} - F = \Delta m\omega^2 R$$

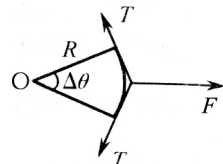



그림 2-14-4

$\Delta\theta$ 가 매우 작으면 $\sin\frac{\Delta\theta}{2} \approx \frac{\Delta\theta}{2}$ 이고 $\Delta m = \frac{m}{2\pi R} \cdot R\Delta\theta = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \cdot m$ 이며

$$F = BT\Delta l = B \cdot \frac{\theta\omega}{2\pi} \cdot R\Delta\theta$$

이므로

$$T = \frac{R\omega}{2\pi}(QB + m\omega)$$

9. 관이 v_0의 속도로 운동하면 작은 구도 그와 함께 운동하면서 로렌쯔힘을 받게 되는데 이 힘의 방향은 관의 축을 따라 우로 향하며 이 힘의 크기는 $F = qv_0B$ 로 된다. 그러면 우의 방향으로 향하는 가속도 $a = \frac{F}{m} = \frac{qv_0B}{m}$ 가 생기며 따라서 같은 방향으로 향하는 운동속도가 나타난다. 이 속도때문에 추가적으로 받게 되는 로렌쯔힘의 방향은 관벽에 수직이면서 왼쪽으로 향한다. 그러나 관벽을 수직으로 누르는 힘은 관벽의 맞선힘과 상쇄되여버리므로 작은 구는 관축방향을 따라 우로 향하는 로렌쯔힘 qv_0B 만을 받게 된다. 이 힘의 작용을 받으면서 구가 N위치에 도달할 때의 속도는

$$v' = \sqrt{2ah} = \sqrt{\frac{2qv_0Bh}{m}}$$

로 된다. 그런데 이 구는 v_0의 속도로 오른쪽 방향으로도 운동하고있으므로 N위치에 도착하였을 때의 합성속도는

$$v = \sqrt{v'^2 + v_0^{\ 2}} = \left(\sqrt{\frac{2qBh}{mv_0} + 1}\right)v_0$$

로 된다. 관을 벗어난 다음에는 자기마당속에서 로렌쯔힘을 받으면서 등속원운동하게 되며 이 원운동자리길의 반경은

$$R = \frac{mv}{Bq} = \left(\sqrt{\frac{2qBh}{mv_0} + 1}\right)\frac{mv_0}{qB}$$

10. 먼저 무한직선도선이 4각형도선틀에 주는 힘 F' 를 구하자. 문제에 준 그림에서 볼수 있는것처럼 변 ab와 cd는 대칭이며 ab변이 받는 힘은 수직웃방향, cd변이 받는 힘은 수직아래방향이

므로 이 두 힘은 상쇄된다. 한편 ad변이 받는 힘 F'의 크기는 $F_1' = B_1 I_2 l_2$ 이며 그 방향은 왼쪽으로 향한다. 여기서 B_1은 무한직선도선전류가 ad변위치에 만드는 자기유도이며 크기는 $B_1 = \frac{kI_1}{r}$ 이다. 꼭같은 리치로 bc변이 받는 힘은 $F_2' = B_2 I_2 l_2$ 이며 방향은 오른쪽으로 향한다. 여기서

$$B_2 = \frac{kI_1}{r + l_1}$$

이다. 따라서 4각형도선틀이 받는 전체 힘은

$$F' = F_1' - F_2' = \frac{kI_1 I_2}{r(r + l_1)} l_1 l_2$$

이며 그 방향은 왼쪽으로 향한다. 뉴톤의 제3법칙에 의하면 4각형도선틀이 무한직선도선에 주는 힘 F의 크기는 우에서 구한 F'와 같으며 방향은 반대로 된다. 즉

$$F = \frac{kI_1 I_2}{r(r + l_1)} l_1 l_2$$

방향은 오른쪽이다

11. 1) 대전립자가 시계바늘정방향으로 돌 때의 전기마당에 의한 힘을 F, 로렌쯔힘을 f라고 하자. 그러면 F와 f의 방향은 +전하쪽으로 향한다. 이때 $F = 3f$, $F + f = m\frac{v^2}{r}$ 이다. 립자의 운동방향이 반대로 되면 로렌쯔힘의 방향이 반대로 된다. 한편 전기마당에 의한 힘은 두 전하사이의 거리의 두제곱에 거꿀비례하므로 이 힘을 F'라고 하면

$$F' = \frac{r^2}{R^2} F, \quad F' - f = m\frac{v^2}{R}$$

로 된다. 이 4개의 식을 련립하여 풀면 $R / r = \sqrt{7} - 2$ 로 된다.

2) ＋전하의 전기량을 Q, －전하의 전기량을 q하고 하자. 자기마당을 없앨 때 부로 대전된 립자가 가지고있는 에네르기는

$$E = E_p + E_k = -k\frac{Q\cdot q}{r} + \frac{1}{2}mv^2 =$$
$$= -Fr + \frac{1}{2}(F+f)r = -\frac{1}{2}(F-f) < 0$$

이다. 이때 전기마당이 립자에 주는 힘이 원운동의 향심력으로 된다. 따라서 립자의 운동자리길은 타원으로 변하지만 여전히 +전하의 둘레로 돌아간다. 자기마당을 없애는 순간 립자의 위치가 이 타원의 자리길우의 한 끝점으로 된다. 이제 타원의 다른 끝점이 +전하로부터 r'만큼 떨어져있고 립자가 이 끝점을 지날 때의 속도를 v'라고 하면 케플레르의 제2법칙으로부터 $rv = r'v'$로 되여야 하며 에네르기보존법칙으로부터

$$-k\frac{Qq}{r'} + \frac{1}{2}mv'^2 = -\frac{1}{2}(F-f)r$$

로 된다. 또한 쿨롱의 법칙으로부터 $-k\frac{Qq}{r'} = -F\frac{r^2}{r'}$로 된다. 이 식들을 련립하여 풀면 $r' = r$로 된다. 립자가 원자리길에서 운동하고있을 때의 운동주기는 $T = \frac{2\pi r}{v}$이다. 이제 타원자리길을 따라 운동할 때의 주기를 T'라고 하면 케플레르의 제3법칙으로부터

$$\frac{\left(\frac{r+r'}{2}\right)^2}{T'^3} = \frac{r^2}{T^3}$$

으로 되며 이로부터 $T' = \frac{3\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{\pi r}{v}$로 된다.

12. 매질속에 자기마당이 걸렸을 때 여기로 들어오는 립자는 저항힘 f와 로렌쯔힘 $f_로$를 받으며 이 두 힘의 방향은 서로 수직이다. 이 두 힘은 모두 립자의 속도에 비례하며

$$f = kv = k\frac{\Delta S}{\Delta t}, \quad f_로 = qvB = qB\frac{\Delta S}{\Delta t}$$

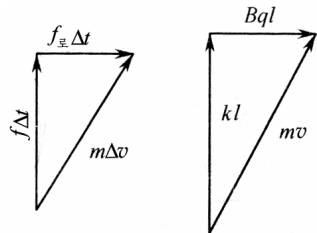



그림 2-14-5

이다. Δt시간동안에 립자운동량의 변화량 $m\Delta v$ 는 저항힘에 의한 힘덩이 $f\Delta t$ 와 로렌쯔힘에 의한 힘덩이 $f_{로}\Delta t$ 의 벡토르합과 같으므로 이 세 벡토르는 그림 2-14-5와 같은 3각형관계에 있다.
매질속에서 립자가 운동하는 전기간에 다음 그림에 보여준 세개의 류사한 벡토르3각형관계를 가지게 된다.
여기서 l은 립자의 입사점으로부터 정지위치까지의 직선거리, v_0 은 립자의 처음속도이다. 자기마당이 없을 때는 이 그림에서 3각형이 수직으로 선 직각변으로 변화되므로 $mv_0 = kB$ 로 된다. 자기유도 B 인 자기마당속에서는 $mv_0 = \sqrt{(kl_1)^2 + (Bql_1)^2}$ 으로 되며 자기유도가 $B/2$ 인 경우에는

$$mv_0 = \sqrt{\left(k\frac{l_2}{2}\right)^2 + \left(Bq\frac{l_2}{2}\right)^2}$$

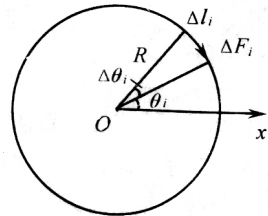
으로 된다. 우의 세 식으로부터

$$l_2 = \frac{2l_1}{\sqrt{1+3(l_1/l)^2}} = 8.3\text{cm}$$

13. 그림 2-14-6에서와 같이 자리표계를 정하고 원형도선우에서 미소부분 Δl_i 를 취하면 $\Delta l_i = R\Delta\theta_i$ 이다.
이때 요소전류 $I_1\Delta l_i$ 가 받는 자기힘의 크기는

$$\Delta F_i = BI_1\Delta l_i = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi x_i} I_1 \Delta l_i$$

그림 2-14-6

이다. 여기서 x_i 는 요소전류 $I_1\Delta l_i$ 로부터 직선도선까지의 거리이다. 대칭성의 견지에서 볼 때 이 요소힘들의 수직방향성분들의 합은 령이다. 따라서 원형도선이 받는 힘은 오른쪽수평방향으로 향하게 된다. 이 힘 F 는

$$F = \sum \Delta F_i \cos\theta_i = \sum \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x_i} \Delta l_i \cos\theta_i =$$

$$= \sum \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R\cos\theta_i} R\Delta\theta_i \cos\theta_i = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \sum \Delta\theta_i =$$

$$= \mu_0 I_1 I_2$$

14. 1) 문제조건으로부터 구멍 A를 통과하여 구역 Ⅱ로 들어온 전자선에서 속도의 축방향성분이 v이다. 이 전자들은 구역 Ⅱ에서 자기마당 B의 작용을 받아 라선운동을 하는데 라선의 피치(라선운동에서 한바퀴 돌 때 축방향으로 전진한 거리)들은 다 같으며 라선운동의 주기는

$$T' = \frac{2\pi m}{eB}$$

으로서 속도에 무관계하다. 그리고 라선운동의 피치는

$$h = vT' = \frac{2\pi mv}{eB}$$

이다. 여기서 m은 전자의 질량, e는 전기소량이다. 이 전자들이 구멍 A′를 통과하려면 L이 h의 옹근수배로 되여야 한다. 즉

$$L = nh = n\cdot\frac{2\pi mv}{eB}, \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

그러므로 자기유도의 크기는

$$B = n\cdot\frac{2\pi mv}{eL}$$

로 된다. B의 최소값은

$$B_0 = \frac{2\pi mv}{eL}$$

이며 따라서 B_0은 $h = L$일 때의 B값에 대응된다. 문제에 제시한 그림 ㄴ에서 B의 변화주기는 T이다. 만일 구멍 A를 통과한 전자들이 구역 Ⅱ에서 운동하는 시간이 T'보다 작다면 전자가 A′에 도착하기 전에 B의 방향이 바뀌므로 원래의 라선운동과는 다른 운동을 하게 되며 따라서 이러한 전자들은 A′를 통과할수 없다. 따라서

$$\frac{T}{2} \geq T'$$

조건이 만족되여야 한다. 결국 T의 최소조건은

$$T_0 = 2T' = \frac{2L}{v}$$

로 된다.

2) $T=2T_0$ 이라고 하자. 그러면 구멍 A로부터 구역 Ⅱ로 들어온 산란전자들가운데서 B 가 정방향으로 향하는 시간간격의 앞절반시간동안에 A를 통과한 전자들은 구멍 A′를 통과할수 있지만 그다음 절반시간동안에 A를 통과한 전자들은 A′를 통과할수 없다. (그림 2-14-7)

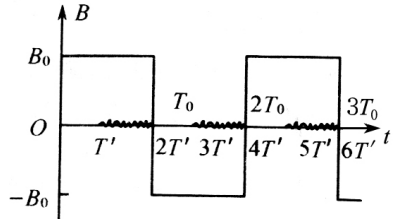



그림 2-14-7

다시말하여 구멍 A를 통과하여 구역 Ⅱ로 들어온 전자들이 이 구역안에서 T' 시간동안 운동을 해야 구멍 A′를 통과할수 있으므로 이 운동시간내에 자기마당의 방향이 변하지 말아야 하는것이다. 그러므로 전자가 구멍 A′를 통과할수 있는 시간간격은 그림에서 점으로 찍어준 구역들이다.

3) 구역 Ⅱ에 들어서는 전자들의 속도에서 진공관축에 수직인 방향성분을 $v_\perp$ 으로 표시하자. 그러면 구역 Ⅱ에서 전자들의 로렌쯔힘에 의한 운동자리길반경은 $r=\frac{mv_\perp}{eB}$ 이며 이 가운데서 $r<\frac{R}{2}$ 인 전자들만이 관벽에 부딪치지 않고 구멍 A′에 도착할수 있다.

따라서 $v_\perp<\frac{eBR}{2m}$ 로 되여야 한다.

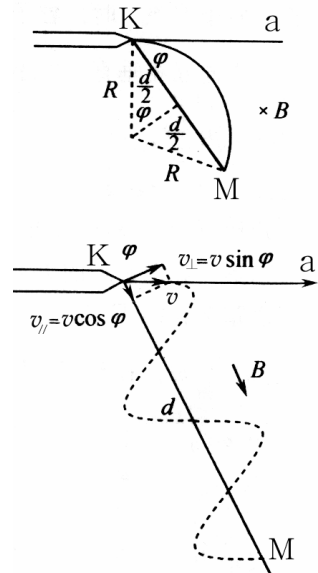
식 $\frac{2\pi m}{eB}=T'=\frac{L}{v}$ 을 리용하면

$v_\perp<\frac{\pi Rv}{L}$ 로 된다. 따라서

$\tan\theta=\frac{v_\perp}{v}<\frac{\pi R}{L}$ 이며 전자의 운동방향과 관축사이각의 최대값은

$$\theta_{최}=\arctan\frac{\pi R}{L}$$

그림 2-14-8

15. 전자총에서 전자의 발사속도를 v라고

하면 $\frac{1}{2}mv^2 = eU$ 으므로 $v = \frac{\sqrt{2eU}}{m}$, 여기서 m 은 전자질량, e 는 전기소량(절대값)

1) 그림 2-14-8에서 보는바와 같이 표적 M을 명중하려면 전자의 운동자리길반경 R 와 α, φ 사이에 $R = \frac{d}{2} / \sin\varphi$ 와 같은 관계가 만족되여야 한다. 또한 R 와 자기마당 B 사이에는 $R = \frac{mv}{eB}$ 관계가 있다. 이 세 식으로부터

$$B = \frac{mv}{eR} = \frac{2\sin\varphi}{d}\sqrt{\frac{2mU}{e}}$$

문제에서 주어진 수값들을 넣으면

$$B = 3.7 \times 10^{-3}\,\mathrm{T}$$

2) $\boldsymbol{B} /\!/ KM$ 일 때 전자는 걸음이 일정한 라선운동을 한다. 이 전자는 $v_{/\!/} = v\cos\varphi$ 의 속도로 KM 방향으로는 등속운동도 한다. 표적 M에 도착할 때까지 걸리는 시간은

$$t = \frac{d}{v\cos\varphi}$$

또한 이 전자가 $v_{\perp} = v\sin\varphi$ 의 속도로 B 에 수직인 평면에서는 등속원운동하는데 이 원운동의 주기는

$$T = \frac{2\pi m}{eB}$$

전자가 표적과 정확히 충돌하려면

$$t = nT, \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

로 되여야 하므로

$$B = \frac{2n\pi mv\cos\varphi}{ed}, \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

수값들을 넣으면 $B = n \times 6.7 \times 10^{-3}\,\mathrm{T}$

제15장. 전자기유도

1. 1), 3)

풀이방향. 전체 비행구역안에서 지자기마당의 수직성분은 수직아래방향으로 향한다. 때문에 비행기가 어느 방향으로 날든지 자력선을 끊는 상태는 같다. 오른손규칙을 써보면 비행기날개끝에서의 전위는 비행사의 왼쪽이 오른쪽에서보다 높다.

2. 3)

풀이방향. 가변저항기의 미끄럼단자를 오른쪽으로 움직일 때 선륜으로 흐르는 전류는 감소되며 따라서 선륜내부의 자기마당이 약해진다. 그러면 두 금속고리안으로 통하는 자력선묶음도 모두 감소된다. 이때 두 고리에 생기는 유도전류의 흐름방향이 같다.(문제에서 제시한 그림의 왼쪽에서 오른쪽 방향으로 볼 때 시계바늘운동방향) 매개의 고리를 개별적인 자석으로 보면 M과 N사이에 서로 다른 자극이 생기므로 서로 끌어당기게 된다.

3. $W = \dfrac{2v(l_2B)^2 l_1}{R}$

풀이방향. 도선틀의 짧은 변이 자기마당속에 들어서야 도선틀에 유도전류가 생기며 그때에는 사람이 미는 힘을 주어야 도선틀의 등속운동을 유지할수 있다. 이 힘의 크기는

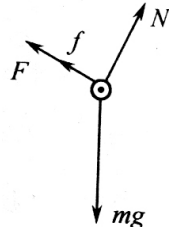
$$F = BIl_2 = B\frac{Bl_2v}{R}l_2$$

이다. 그런데 도선틀이 자기마당을 완전히 통과하려면 량쪽 두 변이 각각 다 지나가야 하므로 사람이 수행해야 할 일은

$$W = 2Fl_1 = \frac{2v(l_2B)^2}{R}l_1$$

4. 막대기가 아래로 미끄러질 때 막대기는 중력 mg, 맞선힘, $N = mg\cos\theta$, 마찰력 f, 자기힘 $F = \dfrac{B^2L^2v}{R}$ 를 받는데 그 방향들을 그림 2-15-1에 주었다.

그림 2-15-1

이 힘들이 평형을 이루었을 때 속도가 제일 커진다. 이 힘들의 평형조건은

$$mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta - \frac{B^2L^2v}{R} = 0$$

따라서 최대속도는

$$v = \frac{mg(\sin\theta - \mu\cos\theta)}{B^2L^2}R$$

5. 1) 도체 MN과 두 도체 Oa, Ob가 만드는 3각형 aOb가 닫긴회로를 이루고있으며 여기서 MN의 일부분 ab가 회로에서 전원의 역할을 한다. 유도전동력은 $\mathscr{E} = BLv$ (여기서 L 는 ab부분의 길이)이며

$$L = \mathrm{Ob}\cdot\tan\theta = vt\tan\theta$$

이므로 결국 유도전동력은 시간 t 에 비례한다. 유도전류는 $I = \frac{\mathscr{E}}{R_{전}}$ ($R_{전}$ 은 닫긴회로의 전체 저항)이다. 3각형 aOb둘레의 길이를 S 로 표시하면

$$S = \mathrm{Ob} + \mathrm{Oa} + \mathrm{ab} = vt + \frac{vt}{\cos\theta} + vt\tan\theta$$

이며 전체 저항은

$$R_{전} = SR = vt\left(1 + \frac{1}{\cos\theta} + \tan\theta\right)\cdot R = vtR\left(\frac{\cos\theta + 1 + \sin\theta}{\cos\theta}\right)$$

이다. 따라서 닫긴회로에 흐르는 유도전류는

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R_{전}} = \frac{Bv^2\tan\theta\cdot t}{vtR(\frac{\cos\theta + 1 + \sin\theta}{\cos\theta})} = \frac{Bv\sin\theta}{R(\cos\theta + 1 + \sin\theta)}$$

즉 유도전류의 값은 시간에 무관계한 상수로 된다.

2) 도체 MN이 등속운동할 때 외부힘 F 와 자기힘 $F_{자}$ 은 비긴다. 즉

$$F = F_{자} = BIL = \frac{B^2v^2t\sin\theta\cdot\tan\theta}{R(\cos\theta + 1 + \sin\theta)}$$

외부힘의 일능률은

$$P_{외} = Fv = \frac{B^2v^3t\sin\theta\cdot\tan\theta}{R(\cos\theta + 1 + \sin\theta)}$$

3) 에네르기전환및 및 보존의 법칙을 고려하면 외부힘이 수행한 일이 전부 회로에서 전기적일로 넘어가므로 전력은

$$P_{전} = P_{외} = \frac{B^2 v^3 t \sin\theta \tan\theta}{R(\cos\theta + 1 + \sin\theta)}$$

6. 1) l 을 매 변의 길이, R 를 매 변의 저항으로 표시하면 $l = 0.8\text{m}$, $R = 0.01\Omega$ 이다. 변에서의 유도전동력을 $\mathscr{E}_1$, ab 변에서의 유도전동력을 $\mathscr{E}_2$ 이라고 표시하면

$$\mathscr{E}_1 = Blv_1 \sin 90° = Bl\omega \cdot \frac{3}{4} l = \frac{3}{4} Bl^2 \omega = 0.024\text{V}$$

$$\mathscr{E}_2 = Blv_2 \sin 90° = Bl\omega \cdot \frac{1}{4} l = \frac{1}{4} Bl^2 \omega = 0.008\text{V}$$

da와 bc변은 자력선을 자르지 않으므로 여기에는 유도전동력이 생기지 않는다.

2) 닫긴도선틀안에 생기는 전체 유도전동력은

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 = 0.032\text{V}$$

이로부터 유도전류는

$$I = \frac{\mathscr{E}}{4R} = \frac{0.032}{0.04} = 0.08(\text{V})$$

렌쯔의 규칙 혹은 오른손의 규칙에 의해 판단해보면 전류는 $abcd$ 를 따라 흐른다.

3) 닫긴회로에서 전체 유도전동력은 전체 전위차와 같다. 그리고 $ebcf$ 부분에서의 유도전동력은 전체 전동력의 절반이다. 또한 이 부분의 저항은 닫긴회로전체 저항의 절반으로 된다. 결국 이 부분에서의 전위의 증가량과 전위의 감소량은 꼭같다. 이로부터 e 점과 f 점사이의 전위차는 령이다.

7. 가령 자기마당 B 의 방향이 그림면을 뚫고 들어가는 방향이라고 하자. 이때 봉 ab 에 생기는 유도전동력은 $\mathscr{E}_1 = Bvl$ 이고 전류흐름 방향은 $a \to b$ 이다. 꼭같이 하여 봉 cd 에 생기는 유도전동력은 $\mathscr{E}_2 = Bvl$ 이고 전류방향은 $d \to c$ 이다. 닫긴회로에서 전류흐름방향은 $a \to b \to d \to c$ 이고 전류의 세기는

$$i = (\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2)/2R = (2Bvl)/2R = Bvl/R$$

이때 봉 ab 가 받는 자기힘은 우로 향하고 cd 가 받는 자기힘은 아래로 향하며 그 크기는

$$f = iBl = \frac{B^2 l^2 v}{R}$$

봉 ab가 아래방향을 등속운동할 때 그의 운동방정식은

$$T + f = Mg$$

이며 cd에 대해서는 $T = f + Mg$로 된다. 여기서 T는 금속봉들에 작용하는 장력이다. 우의 식들로부터 $2f = (M - m)g$

따라서

$$\frac{2B^2 l^2 v}{R} = (M - m)g \ \rightarrow \ v = \frac{(M - m)gR}{2B^2 l^2}$$

8. 1) $\mathscr{E}_1 = B2av_0 = 0.2 \times 0.8 \times 5 = 0.8(\mathrm{V})$

$$I_1 = \frac{\mathscr{E}_2}{R} = \frac{0.8}{2} = 0.4(\mathrm{A})$$

2) $\mathscr{E}_1 = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = 0.5 \times \pi a^2 \times \frac{\Delta B}{\Delta t} = 0.32\mathrm{V}$

$$P_1 = \left(\frac{\mathscr{E}_1}{2}\right)^2 = 1.28 \times 10^2 \mathrm{W}$$

9. 자기마당이 걸렸을 때 이온화기체(길이가 a인 도체막대기로 볼수 있다.)의 속도를 v라고 하자 이때 관의 량쪽 측면방향으로 생기는 유도전동력은 $\mathscr{E} = vaB$이다. 관의 앞뒤쪽에서의 압력차는 기체를 앞으로 밀어주는 추진력을 주게 되며 한편 유도전류(외부회로를 련결했을 때만 존재한다.)가 받게 되는 자기힘과 마찰력은 기체를 뒤로 밀어주게 된다. 기체가 등속으로 움직일 때는 이 두 방향의 힘들이 서로 상쇄되여야 한다. 옴의 법칙에 의하면

$$I = \frac{\mathscr{E}}{\frac{\rho a}{lb} + R}$$

관안에서 기체가 받게 되는 자기힘은

$$F = IBa = \frac{Ba\mathscr{E}}{\frac{\rho a}{lb} + R}$$

자기마당이 없을 때의 마찰력을 f라고 하면 $f = Pab$이며 자기마당이 있을 때의 마찰력을 f'라고 하면 $Pab = F + f'$이다.

한편 $f' \sim v$ 이므로

$$\frac{v_0}{v} = \frac{f}{f'} = \frac{Pab}{Pab - F}$$

우의 식들로부터 전동력을 구하면

$$\mathscr{E} = \frac{Pab}{\dfrac{Ba}{\dfrac{\rho a}{lb} + R}} + \frac{Pb}{v_0 B}$$

10. 봉이 떨어질 때 임의의 순간에 그의 이동속도를 v라고 하자. 이때 생기는 유도전동력은 $\mathscr{E} = Blv$ 이다. 이제 매우 짧은 Δt 시간이 더 흘렀을 때 봉의 속도가 v로부터 $v + \Delta v$ 로 변했다고 하자. 그러면 이때 유도전동력은 $\mathscr{E}' = Bl(v + \Delta v)$ 로 되며 축전기량극판사이의 전압증가량은 $\Delta u = \mathscr{E}' - \mathscr{E} = Bl\Delta v$, 축전기극판에서 전하의 증가량은 $\Delta Q = C\Delta v = CBl\Delta v$, 전류흐름길에서의 전류 $i = \frac{\Delta v}{\Delta t} = CBl\frac{\Delta v}{\Delta t} = CBla$, 금속봉에 뉴톤의 제2법칙을 적용하면 $mg - Bli = ma$, 이로부터 금속봉의 가속도 $a = \frac{mg}{m + B^2l^2C}$ 는 일정한 값으로 된다. 금속봉이 등가속운동하므로

$$h = \frac{1}{2}at^2, \quad t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2h(m + CB^2l^2)}{mg}}$$

11. 1) 원형고리를 무수히 많은 요소부분들로 분할하면 매개 요소부분들은 직선도선으로 볼수 있다. 이 요소부분의 길이를 Δl 라고 하자. 고리의 이동속도가 v인 순간에 요소부분량끝사이의 유도전동력은 $\Delta\mathscr{E} = B\Delta lv$ 이며 고리전체에 생기는 유도전동력은

$$\mathscr{E} = \sum \Delta\mathscr{E} = \sum B\Delta lv = Bv\sum \Delta l = 2\pi Bvr$$

여기서 r 는 고리의 평균반경을 의미한다.(그림 2-15-2)

따라서 유도전류는

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{2\pi Bvr}{R}$$

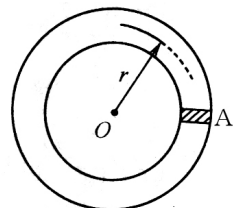



그림 2-15-2

여기서 R 는 원형고리전체의 저항이다. 원형고리에서의 자체유도현상을 무시하면 $R=\frac{\rho l}{S}$ (여기서 $l=2\pi r$)이므로

$$I = \frac{2\pi B v r}{\frac{\rho 2\pi r}{S}} = \frac{BS v}{\rho}$$

2) 원형고리가 축대칭자기마당속에서 움직일 때 운동방향과 자기마당이 서로 수직이므로 이 고리에 작용하는 자기힘은

$$F = BIl = B\frac{BSv}{\rho}2\pi r$$

이며 고리에 흐르는 유도전류의 방향은 오른손의 규칙에 의하여 시계바늘의 운동방향으로 향한다. 왼손의 규칙을 써보면 이 전류에 작용하는 자기힘의 방향이 수직웃방향임을 알수 있다.(고리의 운동방향과 반대) 뉴톤의 제2법칙에 의하여

$$mg - F = ma\ ,\quad a = g - \frac{F}{m} = g - \frac{B^2 2\pi r S v}{m\rho}$$

그런데 밀도 $d=\frac{m}{2\pi rS}$ 이므로

$$a = g - \frac{B^2 v}{\rho d}$$

12. 스위치 S 를 닫을 때 전지와 련결되여있는 선륜에는 자체유도전동력이 생기며 이 두 선륜은 리상적인 변압기로 동작하게 된다. 권선의 직류저항이 령이므로 S 를 닫을 때 자체유도전동력은 $\mathscr{E}_1=\mathscr{E}$ 이며 두 권선의 권회수밀도(단위길이당 권회수)가 같으므로 $n_1=n_2$, 따라서 저항 R 와 련결된 선륜에 생기는 전동력은 $\mathscr{E}_1=\mathscr{E}_2=\mathscr{E}$ 으로 된다. 그러므로

1) 저항 R 에서 소비되는 전력

$$P = \frac{\mathscr{E}_2{}^2}{R} = \frac{\mathscr{E}^2}{R}$$

2) 스위치 S 를 닫는 순간 저항 R 와 련결되여있는 선륜 B에 흐르는 전류는 $I_2=\frac{\mathscr{E}_2}{R}=\frac{\mathscr{E}}{R}$ 이며 $I_1 n_1 = I_2 n_2$ 이므로 전지와 련

결되여있는 권선 A로 흐르는 전류는 $I_1 = I_2 = \dfrac{\mathscr{E}}{R}$ 으로 된다.

이제 권선 A에서 전류의 변화속도를 $\dfrac{\Delta I}{\Delta t}$ 로 놓으면 전동력은 $\mathscr{E} = L\dfrac{\Delta I}{\Delta t}$, 따라서 $\dfrac{\Delta I}{\Delta t} = \dfrac{\mathscr{E}}{L}$ 으로 되며 권선 A로 흐르는 전류는

$$I = I_0 + \frac{\Delta I}{\Delta t}t = \frac{\mathscr{E}}{R} + \frac{\mathscr{E}}{L}t = I_{\text{전지}}$$

결국 전지를 통해 흐르는 전류의 시간적 변화를 그리면 그림 2-15-3과 같다.

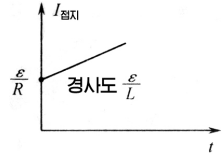



그림 2-15-3

3) 권선 A로 흐르는 전류는 시간에 무관계한 성분 $\mathscr{E}/R$ 과 시간에 따라 변하는 성분 $\mathscr{E}t/L$ 로 되여있다. 이때 두번째 마디만이 선륜 B에 유도전류를 발생시킨다. $t = T$ 일 때 이 전류의 크기는 $\mathscr{E}t/L$ 로 되며 이 순간에 스위치 S를 열기때문에 이 전류에 대응하는 자기마당의 에네르기가 저항 R 에서 전부 줄열로 넘어가게 된다. 따라서

$$Q = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathscr{E}}{L}T\right)^2 L = \frac{\mathscr{E}^2 T^2}{2L}$$

13. 도선의 매개 부분들에서 유도전류의 크기와 방향들은 문제에 제시된 그림에 표시되여있다.전류의 분포에는 회로의 대칭성이 반영되게 된다. 파라데이법칙과 닫긴회로에서의 옴법칙을 리용하면 반경이 a 인 원에서 $\pi a^2 k = 2r_1 I_1 + r_1 I_1$, 바른3각형회로에서 $3\sqrt{3}\pi a^2 k/4 = 2r_2 I_2 + 2r_2 I_2'$ 가 성립됨을 알수 있다.

한편 점 D로 흘러드는 전류의 합과 흘러나가는 전류의 합이 같아야 하므로 $I_1 + I_2 = I_1' + I_2'$ 이다. 또한 전원을 포함하고있는 회로에서의 옴의 법칙에 의해

$$U_{\mathrm{D}} - U_{\mathrm{A}} = \frac{\pi a^2 k}{3} - I_1 r_1$$

우의 식들과 문제의 조건 $2r_1 = 3r_2$ 을 리용하면

$$U_A - U_D = \frac{\sqrt{3}a^2 k}{32}$$

14. 회로는 n 개의 4각형회로들이 결합된 모양으로 되여있다. PQ 량단사이의 전체 저항을 R_n 으로 표시하면 $R_n = cr$, 한편 PQ 의 왼쪽 부분의 총저항(P_1Q_1 을 포함하면서)을 R_{n-1} 로 표시하면

$$R_n = \frac{2(R_{n-1} + 2r)r}{R_{n-1} + 4r}$$

즉

$$R_{n-1} = \frac{4(R_n - r)r}{2r - R_n}$$

로 된다. 꼭같은 방법으로

$$R_{n-2} = \frac{4(R_{n-1} - r)r}{2r - R_{n-1}} = \frac{2r(5rR_n - 6r^2)}{4r^2 - 3rR_n} = \frac{2(5c-6)}{4-3c}r$$

회로가 x 축방향으로 운동할 때 도선들이 자력선을 절단함과 동시에 자기마당자체가 시간에 따라 변화되므로 이 두가지 요인이 다 유도전동력을 일으킨다. 하나의 4각형이 y 축을 지나 자기마당구역으로 완전히 들어서는데 걸리는 시간은

$$T = \frac{l}{v} = 2s$$

$t = 2.5$s 인 순간에 자기마당과 회로사이의 상대배치를 그림 2-15-4에 보여주었다.

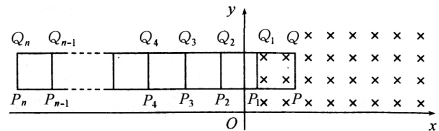



그림 2-15-4

PQQ_1P_1 에서 유도전동력을 $\mathscr{E}_1$ 로 표시하면 $4ir - 2i_1 r = \mathscr{E}_1$, $P_1Q_1Q_2P_2$ 에서의 유도전동력을 $\mathscr{E}_2$ 로 표시하면

$$2i_1 r + (i + i_1)(2r + R_{n-2}) = \mathscr{E}_2$$

로 된다. 만약에 PQQ_1P_1 가 완전히 자기마당속에 들어왔다면 PQ와 P_1Q_1가 자력선을 자르면서 생겨나는 유도전동력의 합은 령으로 되므로 $\mathscr{E}_1$ 는 자기마당자체의 시간적변화때문에 생기는것으로만 되며 따라서

$$\mathscr{E}_1=\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=l^2\frac{\Delta B}{\Delta t}=l^2 b$$

한편 $P_1Q_1Q_2P_2$ 에서 P_2Q_2은 아직 자기마당속에 들어가지 못했기때문에 $\mathscr{E}_2$ 은 P_1Q_1이 자력선을 끊기때문에 생기는 유도전동력 $\mathscr{E}_2'=Blv=(B_0+bt)lv$ 와 자기마당자체의 시간적변화때문에 생기는 유도전동력

$$\mathscr{E}_2''=lv(t-T)\frac{\Delta B}{\Delta t}=lvbt-l^2 b$$

의 합으로 되므로

$$\mathscr{E}_2=\mathscr{E}_2'+\mathscr{E}_2''=B_0lv+2lvbt-l^2 b$$

우의 식들로부터

$$i=\frac{2r(B_0lv+2blvt-l^2b)+(4r+R_{n-2})l^2b}{20r^2+6rR_{n-2}}$$

여기서 우에서 구한 R_{n-2} 식을 넣으면

$$i=\frac{B_0}{r}\frac{(56-41c)}{8}\times10^{-3}$$

15. 무한원기둥구역에 걸린 고른자기마당의 시간적변화에 의해 회리전기마당이 생기게 되는데 이 전력선은 원기둥중심축을 축으로 하는 동심원들로 된다.(그림 2-15-5) 절연체고리가 놓인 위치에서도 회리전기마당이 생기므로 대전된 작은 구는 이 회리전기마당의 작용을 받게 된다. 이 힘의 방향은 고리에 대한 접선방향이므로 구는 접선가속도를 받게 되며 따라서 대전된 작은 구는 고리를 따라 가속되게 된다. 한편으로 이 구는 로렌쯔힘도 받게 되는데 이 힘의 방향은 고리의 중심으로 향한다. 그리고 고리로부터 힘을 받게 되는데 그 방향은 로렌쯔힘의 방향과 반대로 된다.

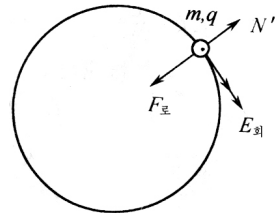



그림 2-15-5

이 로렌쯔힘과 고리로부터 받는 힘의 벡토르합이 바로 구가 원운동하는데 요구되는 향심힘으로 된다. 그리고 구하려고 하는 대상인 구가 절열체고리에 주는 힘은 다름아닌 구가 고리로부터 받는 힘의 반작용력이다. 주어진 조건으로부터 $0<t\le T$ 구

간에서는 자기마당 B가 시간 t에 따라 증가되며 $t=0$인 때는 $B=0,\ t=T$ 때는 $B=B_0$이므로 $B=\frac{B_0 t}{T}$로 된다. 결국 이 시간 구간내에서는 자기마당의 변화속도가 $\frac{\Delta B}{\Delta t}=\frac{B_0}{T}$으로 된다. 자기마당의 이러한 시간적변화는 회리전기마당 $E_{회}$를 만들게 되는데 이 전력선들은 원기둥중심축과 그림면의 사귐점을 중심으로 하는 동심원들로 되며 렌쯔의 규칙을 적용하여보면 그 방향이 시계바늘운동의 정방향으로 됨을 알수 있다. 이 방향을 그림에 표시하여주었다. 회리전기마당의 세기 $E_{회}$의 크기는

$$E_{회}=\frac{R}{2},\quad \frac{\Delta B}{\Delta t}=\frac{B_0 R}{2T}$$

따라서 구가 고리의 접선방향으로 받게 되는 전기마당의 힘은

$$F_{접}=qE_{회}=\frac{qB_0 R}{2T}$$

이며 구의 가속도 $a_{접}$은 $a_{접}=\frac{qB_0 R}{2mT}$로 된다. 구가 $t=0$인 순간에 정지하고있었으므로 t인 시각에 그의 원운동속도 v는

$$v=a_{접}t=\frac{qB_0 Rt}{2mT}$$

구가 이런 속도로 원운동하고있는 순간에 받게 되는 로렌쯔힘은 원의 중심으로 향하며 그 크기는

$$F_{로}=qvB=q\frac{qB_0 Rt}{2mT}\cdot\frac{B_0 t}{T}=\frac{q^2 B_0^2 R}{4mT^2}t^2$$

이다. 한편 구가 고리로부터 받게 되는 힘 N'(그림에 방향이 표시되였다.)과 로렌쯔힘 $F_{로}$의 벡토르합이 이 순간의 향심력 $F_{향}$(방향은 원의 중심으로 향한다.)으로 되며 그 크기는

$$F_{향}=\frac{mv^2}{R}=\frac{q^2 B_0^2 R}{4mT^2}t^2=\frac{1}{2}F_{로}$$

로 된다. 이로부터 알수 있는바와 같이 $F_{향}$이 $F_{로}$의 절반으로 되므로 $N'=\frac{1}{2}F_{로}$, 그의 반작용힘인 N(구가 고리에 주는 힘)의 크기는

$$N = N' = \frac{q^2 B_0^2 R}{4mT^2} t^2$$

으로 되며 그의 방향은 $F_{향}$과 같은 방향으로 된다.

$t > T$ 일 때에는 $B = B_0$ 으로 일정한 량이므로 회리전기마당이 생기지 않으며 따라서 $E_{회} = 0$, 결국 구가 받게 되는 접선가속도도 령으로 되므로 구는 고리를 따라 등속원운동하게 되며 그 속도는

$$v_0 = a_{접} T = \frac{qB_0 R}{2m}$$

이때 구가 받는 로렌쯔힘은 (앞에서 구한 $F_{로}$에서 $t = T$ 로 놓은 값)

$$F_{로} = \frac{q^2 B_0^2 R}{2m}$$

구가 받는 향심력은(역시 앞에서 구한 $F_{향}$에서 $t = T$ 로 놓은 값)

$$F_{향} = \frac{q^2 B_0^2 R}{4m}$$

여기서 알수 있는것처럼 로렌쯔힘의 절반은 역시 N'와 상쇄되며 N'의 반작용힘은

$$N = \frac{q^2 B_0^2 R}{4m}$$

이다.

제16장. 교류전류

1. 2)

풀이방향. 회전자의 회전속도가 2배로 높아지면 교류전류의 각주파수 ω가 2배로 증가되며 교류발전기가 생산하는 전동력의 최대값은 $\mathscr{E}_{최대} \propto \omega$이다.

2. 구하려는 전기저항값을 R라고 하면 이때 R의 량단의 전압은 U_2, 직류는 I_2, 즉

$$UI_0 = U_2 I_2, \quad U_2 = I_2 R, \quad U_2 / U = N_2 / N_1$$

웃식으로부터

$$R=\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2\frac{U}{I_0}=880\,\Omega$$

3. 4)

풀이방향. 직접 LC 회로의 주파수공식으로부터 계산하여 얻을수 있다.

4. 그림 2-16-1에서 C_1 는 주파수동조작용을, C_2 은 고주파전류만 통과시켜 주파수를 떨구는 작용을 한다. C_2 은 고주파를 통과시키므로 저주파신호만 레시바에 가게 한다.

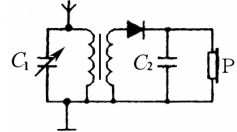



그림 2-16-1

5. 유도전동력의 최대값은 $\mathscr{E}_{최대}=n\omega\Phi_{최대}$, 권선이 자기마당속에서 회전하는 주기는 T 이다. 그러면

$$\omega=\frac{2\pi}{T}$$

옴의 법칙에 따라 회로에 흐르는 전류의 세기의 최대값은

$$I_{최대}=\frac{\mathscr{E}_{최대}}{R+r}$$

교류전류계는 I 를 가리키는데 이것은 전류의 실효값이다. 실효값과 최대값의 관계는

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}I_{최대}$$

주어진 그라프로부터 $\Phi_{최대}=1\times10^{-2}\text{Wb}$, $T=3.14\times10^{-2}\text{s}$ 이다. 우의 식으로부터

$$I=1.4\text{A}$$

6. 걸어준 교류전압이 직각파모양으로 변화되고 교류전압의 +전압과 전압의 크기가 갈다면 이 전압의 실효값이 최대전압과 갈아지므로 $U_{최대}=U$ 로 된다. 매개 금속통안에서 전기마당의 세기는 령이므로 립자들은 이 통안에서 모두 등속직선운동을 하게 된다. 따라서 립자들이 통들사이의 틈을 통과할 때 가속운동을 하여야만 립자들의 에네르기가 부단히 커질수 있다. 그러자면 매개 통속에서 립자들의 운동시간이 교류전압주기의 절반으로 되여야 한다.(통들사이의 간격은 대단히 작으므로 립자들이 가속

되는 시간은 무시할수 있다.) 립자가 n번째 통과 $n+1$번째 통사이의 틈에서 가속될 때는 다음과 같은 식이 만족되여야 한다.

$$qU = \frac{1}{2}mv_{n+1}^2 - \frac{1}{2}mv_n^2$$

그런데 립자가 n개의 관을 통과하는 과정에 이미 $n-1$번 가속되였으므로

$$(n-1)qU = \frac{1}{2}mv_n^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

으로 되며 따라서 n번째통의 길이는

$$L_n = \frac{T}{2}v_n = \frac{1}{2f}v_n$$

$$\therefore\ L_n = \frac{1}{2f}\sqrt{\frac{2qU(n-1)}{m} - v_1^2}\ ,\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

7. 6600V

풀이방향. 3상변압기에서 매 상사이의 전압 U와 권선 n사이에는

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

의 관계가 있다. 그림에서 권선련결방식이 3각형결손이라는데 주의를 돌려야 한다.

8. 답은 그림 2-16-2에 표시하였다. 그림을 그릴 때 곡선의 웃부분과 아래부분의 봉우리값이 서로 다른 시누스곡선의 한 부분이라는 것을 중시해야 한다. 곡선의 최고점, 최저점, 매 가로축의 교차점의 위치가 정확해야 한다.

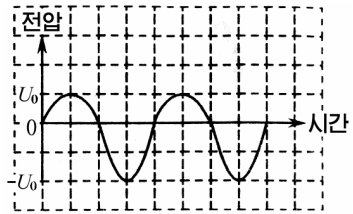



그림 2-16-2

9. 전류와 시간사이에 시누스관계를 형성할 때 자력선묶음과 자력선묶음의 변화률사이의 관계는(한 주기안의 최대값과 평균값을 가리킨다.) 비례관계이다. 이러한 상태에서 유도전동력과 자력선묶음은 비례한다. 권선 1에서 생겨난 자력선묶음은 $\Phi = kU_1$, $U_1 = 40\text{V}$, k는 비례결수이다. 권선 2를 통과할 때 생기는 전압은 U이다. 만약 권선 2에서 전압 U를 주면

$$\frac{\Phi}{2}=k\cdot\frac{U_1}{2}$$

이다. 철심은 대칭이므로 그 자력선묶음으로부터 절반을 나누면 $k\cdot U_1/4$는 권선 1을 지나므로 1차권선에 걸리는 전압은

$$U_2=\frac{U_1}{4}=10\text{V}$$

10. 그림에서 알수 있는바와 같이 두개의 2극소자는 동시에 열리거라 동시에 닫긴다. 그것들이 열리는 반주기동안에 저항 R_1, R_2, R_3은 병렬로 되고 이때 R_1에서 소비되는 전력은

$$P_1=\frac{U^2}{R_1}$$

이다. 그것들이 닫기는 반주기동안에는 저항 R_1, R_2, R_3은 직렬로 련결된다. 이때 R_1에서 소비되는 전력은

$$P_2=\frac{U^2R_1}{(R_1+R_2+R_3)^2}$$

이로부터 저항 R_1에서 소비되는 전력은

$$P=\frac{P_1+P_2}{2}\approx 1\text{W}$$

11. 스위치 K_1을 닫은 후 두개의 권선에 생기는 유도전동력은 같다. 즉

$$L_1\cdot\frac{\Delta I_1}{\Delta t}=L_2\cdot\frac{\Delta I_2}{\Delta t}\quad\rightarrow\quad \Delta I_1=(\frac{L_2}{L_1})\Delta I_2$$

K_2을 닫는 순간에 두 권선에 흐르는 전류의 세기의 처음값은 각각 $I_2=20\text{A}$, $I_2=0\text{A}$, K을 닫은 후

$$I_1-I_0=\left(\frac{L_2}{L_1}\right)I_2$$

안정한 상태에서 $I_1+I_2=\frac{\mathscr{E}}{r}$이다. 방정식들로부터 안정한 전류의 세기를 구하며

$$I_1=\frac{L_2\mathscr{E}+rL_1I_0}{r(L_1+L_2)},\qquad I_2=\frac{L_1\mathscr{E}-rL_1I_0}{r(L_1+L_2)}$$

12. 전등의 력률이 $\cos\varphi_1=0.4$이며 정상으로 켜질 때(즉 소비전력

이 11W일 때)출구의 전력은

$$S_1 = \frac{P}{\cos\varphi_1} = 27.5\text{V}\cdot\text{A}$$

이다. 이때 공급할수 있는 전등의 개수는

$$n_1 = \frac{S}{S_1} = \frac{UI}{S_1} = 320(\text{개})$$

전등의 력률이 $\cos\varphi_2 = 0.8$이고 정상으로 켜질 때

$$S_2 = \frac{P}{\cos\varphi_2} = 13.75\text{V}\cdot\text{A}$$

이때 켤수 있는 전등의 개수는

$$n_2 = \frac{S}{S_2} = \frac{UI}{S_2} = 640(\text{개})$$

13. 회로에서 순간전압값이 $u = U_0 \sin\omega t = 22\ \ 0\sqrt{2}\sin(2\pi ft)(\text{V})$ 이고 순간전류값은

$$i = I_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = 2.75\sqrt{2}\sin(2\pi ft + \frac{\pi}{2})(\text{A})$$

문제의 조건으로부터 $t = t_1$일 때 $i = 2.75\text{A}$이다. 즉

$$2.75 = 2.75\sqrt{2}\sin(2\pi ft + \frac{\pi}{2})$$

혹은 $\sin(2\pi ft + \frac{\pi}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$이다. 즉

$$\sin\left(2\pi ft + \frac{\pi}{2}\right) = \pi - \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{4}\pi$$

이로부터

$$t_1 = \frac{1}{400}\text{s}$$

이때 대응하는 전압의 순간값은

$$u = 220\sqrt{2}\sin(2\pi ft) = 220\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} = 220\text{V}$$

14. 이 회로는 직렬공진회로이다. 관측된 현상은 회로가 주공진구역에 가까이하고있다는것을 보여주며 전류계의 수값은 실효값이다.

1) 공진이 일어날 때 회로의 전류의 세기는 최대값 $i_{최}$ 이고 저항의 최소값이 Z_0 이면 이것은 전기저항 R 와 같다. 즉

$$Z_0 = R, \quad Z_0 = \frac{U}{i} = R$$

만일 Z_1 와 Z_2 이 철심의 1과 2위치에 대응하는 회로의 저항을 표시한다면

$$Z_1 = \frac{U}{i_{최}/2}, \quad Z_2 = \frac{U}{i_{최}/2}, \quad Z_1 = Z_2$$

즉

$$\sqrt{R^2 + (\omega L_1 - \frac{1}{\omega C})^2} = \sqrt{R^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2}$$

$L_1 \neq L_2$ 이고 공진점에서 자리각이 전압은 전류보다 떨어지고 공진이 일어난 후에는 전압이 전류보다 앞서므로

$$\omega L_1 - \frac{1}{\omega C} = -\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}\right) \quad \rightarrow \quad \omega(L_1 + L_2) = \frac{2}{\omega C}$$

$$\therefore \ C = \frac{2}{\omega^2 (L_1 + L_2)} = 4\,\mu\mathrm{F}$$

위치 1에서

$$Z_1 = \frac{U}{i_{최}/2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

따라서

$$\sqrt{R^2 + \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{2} R$$

여기에 수값을 넣으면 $R = 50\,\Omega$ (부의 값은 버린다. 그림2-16-3에 표시)

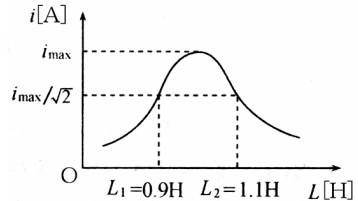



그림 2-16-3

2) ① 저항 Z_1 는

$$Z_1 = \sqrt{R^2 + \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = 50\sqrt{2}\Omega$$

이 값은 저항 Z_2과 같다.

② 회로에서 전류의 세기의 최대값은

$$I_1 = I_2 = \frac{0.04}{\sqrt{2}} = 0.0283(\text{A})$$

두 위치에서 전류의 세기값은

$$I_1 = I_2 = \frac{0.04}{\sqrt{2}} = 0.0283(\text{A})$$

③ 위치 1에서 전류와 전압사이의 자리각차

$$\tan\varphi_1 = \frac{\omega L_1 - \frac{1}{\omega C}}{R} = -1 \quad \to \quad \varphi_1 = -45°$$

같은 리치로 위치 2에서 $\varphi_2 = 45°$ 이다.

두 위치에서 벡토르선도를 그리고 매 부분품에서 전압을 계산한다. 위치 1에서 벡토르선도는 그림 2-16-4와 같고 축전기 두 끝에 걸린 전압은

그림 2-16-4

$$U_C = \frac{I_1}{\omega C} = 14.15\text{V}$$

유도권선의 두 끝의 전압은 $U_L = I_1\omega L_1 = 12.375\text{V}$, 저항의 두 끝사이의 전압은 $U_R = I_1 R = 1.415\text{V}$

이 상태에서 $U_C - U_L = 1.415\text{V}$

이것은 전류의 처음전압을 표시한다. 위치 2에서 벡토르선은 그림 2-16-5와 같은 방법으로 그리고 매 요소에 걸린 전압을 구할수 있다.

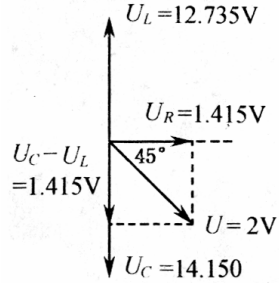
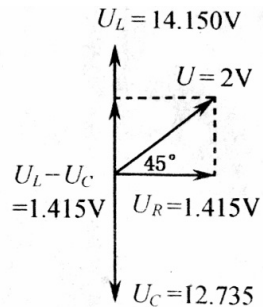



그림 2-16-5

제17장. 전기학종합문제

1. 어떤 점전하가 있는 곳가까이에서 다른 점전하가 이 점전하에 주는 전기마당의 영향이 대단히 작으므로 이 영향을 무시할수 있다. 전력선은 고르롭게 공간으로 퍼져나가므로 전력선의 총수와 전기량은 비례한다. 단지 전력선의 일부가 이 점전하의 마당에 들어가는데 이 부분의 전력선은 정점이 점전하 $+q_1$ 인 곳에 있고 정각이 2α 인 원뿔모양을 이루고있다. 이 부분의 전력선의 수와 전하 $+q_1$ 에서 나오는 전력선의 총수의 비는 대응하는 구면의 면적비와 같다.

$$\frac{2\pi R^2(1-\cos\alpha)}{4\pi R^2}=\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)$$

전력선은 크기가 같은 전기량을 련결하므로 점전하 $+q_1$ 에서 나와서 각 2α 를 이루는 전력선의 수는 2β 의 각을 이루며 점전하 $-q_2$ 로 들어가는 전력선의 수와 같다. 그러므로

$$q_1(1-\cos\alpha)=q_2(1-\cos\beta) \quad \rightarrow \quad \sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{q_1}{q_2}}\sin\frac{\alpha}{2}$$

만약 $\sqrt{\frac{q_1}{q_2}}\sin\frac{\alpha}{2}>1$ 이라면 전력선은 점전하 $-q_2$ 에 들어갈수 없다.

2. 1s마다 n 개의 전자가 구에 떨어진다고 하자. 이때 전자의 전체 운동에네르기는

$$E_{\mathrm{k}}=\frac{nmv^2}{2}$$

이다. 평형상태에서 금속구에 떨어지는 전자들의 수는 저항을 통해 땅면으로 흐르는 전자들의 수와 같다. 그러면 전류의 세기 $I=ne$ 이다. 저항에서 열로 넘어가는 에네르기는

$$P=I^2R=n^2e^2R$$

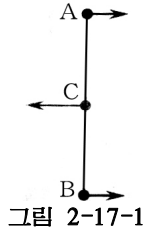
에네르기보존의 법칙에 의하여 단위시간동안에 구가 내보내는 열량은

$$Q=E_{\mathrm{k}}-P_{\mathrm{t}}=\frac{nmv^2}{2}-n^2e^2R=\frac{nmv^2}{2}\left(1-\frac{2ne^2R}{mv^2}\right)$$

량변에의 전위가 0이라고 하면 구의 전위는 $U=IR=neR$ 이고 고르롭게 대전된 전위는 $U=k\cdot\frac{q}{r}$ 이므로 구우에서 전기량은

$$q=\frac{Ur}{k}=\frac{neRr}{k}$$

3. 고찰대상은 3개의 질점으로 이루어진 계이다.(그림 2-17-1) 대칭성을 고려하면 처음에 중심이 C점에 있어야 한다는것을 알수 있다. 왜냐하면 질점계에 작용하는 외부힘들의 합력이 령이므로 질량중심이 움직이지 말아야 하기때문이다. 한편 질점 1, 2에는 전기힘이 작용하고있기때문에 그들사이의 거리는 커져야 하겠지만 처음에 1, 2가 놓여있던 두 점의 련결선우에서 운동할수는 없다. 만일 이렇게 운동한다고 보면 막대기자체의 길이가 늘어날수 없다는 조건에서 질점 3이 좌측으로 이동해야 한다는것, 다시말하여 질량준심이 왼쪽으로 이동해야 한다는 결론이 나오는데 이것은 질량준심이 고정되여 있다는 앞의 고찰내용과 모순된다. 따라서 막대기가 강체이고 질점 1, 2가 전기힘을 받고있다는 조건에서 질량중심이 고정되여있자면 질점 1, 그림에서 보여준것처럼 각각 오른쪽으로 움직여야 하며 질점 3은 왼쪽으로 움직여야 한다는것을 알수 있다. 질점 3이 C점에 도달했을 때 질점 1, 2는 각각 A, B점에 도착하며 A, C, B점들은 한 직선우에 있게 되고 질점 1과 2의 속도방향은 오른쪽으로, 질점 3의 속도방향은 왼쪽으로 향하게 된다. 이때 세개 질점의 속도의 크기를 각각 v_1, v_2, v_3 이라고 표시하고 대칭성을 고려하면 3개 질점들의 운동에네르기의 총합은

그림 2-17-1

$$E_K=\frac{1}{2}mv_3^2+2\left(\frac{1}{2}mv_1^2\right)$$

로 된다. 또한 대칭성과 운동량보존법칙을 고려하면 $mv_3=2mv_1$ 이다. 질점계가 원래 가지고있던 포텐샬에네르기는

$$E_P=3k\frac{q^2}{l}\text{ (여기서 } k \text{ 는 상수)}$$

이고 그림에 보여준 순간의 포텐샬에네르기는

$$E_P' = 2k\frac{q^2}{l} + k\frac{q^2}{2l}$$

이다. 에네르기보존법칙에 따라 $E_P = E_P' + E_k$

웃식을 풀면

$$v_3 = \sqrt{\frac{2kq^2}{3lm}}$$

4. 대칭성을 고려하여 원래의 회로를 그림에 보여준 등가회로로 바꾸고 무수한 층의 <살창>들로 구성된 <내부3각형>을 저항이 $R_{AB}/2$ 인 저항기로 대치시킨다.(그림 2-17-2) 여기서 $R_{AB} = R_x$, $R = a\rho$ 이다. 이렇게 하면 고찰하는 회로가 도체들이 직렬 및 병렬련결된 간단한 회로로 변한다. 이때 R_x 에 대한 방정식은

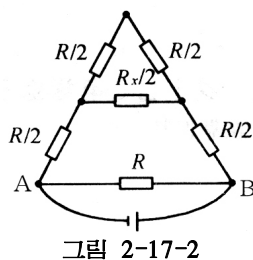



그림 2-17-2

$$R_x = R\left[R + \frac{R\cdot\frac{R_x}{2}}{R+\frac{R_x}{2}}\right]\left[R + R + \frac{R\cdot\frac{R_x}{2}}{R+\frac{R_x}{2}}\right]^{-1}$$

로 되며 따라서

$$R_{AB} = R_x = \frac{\sqrt{7}-1}{3}R = \frac{\sqrt{7}-1}{3}a\rho$$

5. 1) D 바로 련결

$u_i = \mathscr{E}$ 일 때 전위는 $u_a < u_b$, 거꿀방향으로 닫긴 상태에 있고 ab사이는 열려있다.

$u_{ab} = u_i$, $u_i > \mathscr{E}$ 일 때 전위는 $u_a > u_b$, D는 정방향으로 열린 상태에 있고 ab사이는 짧은 도선을 련결된것과 같다. 그러므로 $u_a = u_b$ 이며 출구전압은 $u_{AB} = u_{ab} = u_{bc} = \mathscr{E}$

u_i 의 웃부분($>\mathscr{E}$)은 없어진다. 그림 2-17-3의 ㄱ에 실선으로 보여준 파형이 u_{AB} 이다.

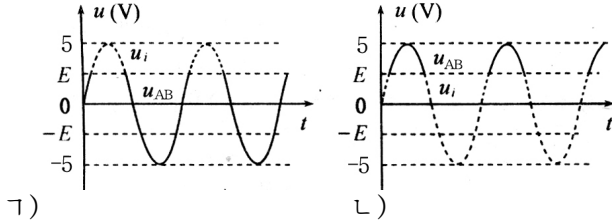



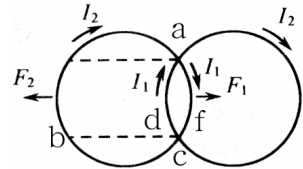
그림 2-17-3

2) D 반대로 련결

$u_i \geq \mathscr{E}$ 일 때 $u_{AB} = u_i$ 이고 $u_i < \mathscr{E}$ 일 때 D는 열리며 $u_i = \mathscr{E}$ 으로 된다. u_i 에서 $\mathscr{E}$ 보다 작은 부분은 전부 없어진다. 출구파형 u_{AB} 는 밑부분이 $u = \mathscr{E}$ 으로 되는 +값의 맥동으로 된다.(그림 2-17-3의 ㄴ)

6. 자기마당을 없애면 자기유도 B 가 처음값 B_0 으로부터 시간에 따라 령까지 변화된다. 이러한 자기마당의 변화에 의해 회리전기마당이 발생하게 되므로 금속고리속의 자유전자가 운동하면서 고리에서 전류가 흐르게 된다. 자기마당을 없앤 때로부터 임의의 t 시간이후 고리로 흐르는 전류를 구하여보자. 먼저 왼쪽 고리의 닫긴회로 afcba 를 고찰하여보자.(그림 2-17-4) 자기마당방향이 종이면을 뚫고들어가는 방향이라면 렌쯔의 규칙에 의해 유도전류는 시계바늘의 회전방향으로 흐르게 된다. 이제 회로 afc 로 흐르는 전류를

그림 2-17-4

I_1, 회로 cb 로 흐르는 전류를 I_2 로 표시하면 이 회로에 생기는 유도전동력은

$$\mathscr{E}_{유} = \pi R^2 \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

이며 닫긴회로에서의 옴의 법칙에 의해

$$\mathscr{E}_{유} = I_1 \frac{r}{2\pi R} l_{Afc} + I_2 \frac{r}{2\pi R} l_{cbA}$$

활등 l_{afc} 와 l_{cba} 의 길이가 각각 $\pi R/3$ 과 $5\pi R/3$ 이라고 하면

$$I_1 + 5I_2 = -\frac{6\pi R^2 \Delta B}{r\Delta t}$$

회로 afcba에 옴의 법칙을 적용하면

$$I_1 = -\frac{(2\pi - 3\sqrt{3})R^2 \Delta B}{2r\Delta t}$$

식을 앞의 방정식에 넣으면

$$I_2 = -\frac{(10\pi - 3\sqrt{3})R^2}{10}\frac{\Delta B}{\Delta t}$$

자기마당의 작용은 I가 흐르는 고리에서 매 요소의 작용의 크기가 $\Delta F = I \cdot \Delta l \cdot \Delta B$와 같고 그 방향은 고리의 반경을 따라 흐른다. 이 고리에 흐르는 전류에 의한 힘이 상대적으로 두 고리중심의 수평축에 대해 거울대칭이므로 매 고리의 수직인 방향에서 합력은 령이다. 또한 이 힘이 왼쪽 고리중심에 수직인 축에 대해서는 비대칭이므로 $I_1 \neq I_2$로서 수평방향의 합력을 나타낸다. 그러므로 그것은 활등 afc에서의 작용과 고리의 왼쪽 대칭인 활등에서의 작용힘의 차와 같다.

$$F = F_2 - F_1 = I_2 l_{ac} B - I_1 l_{ac} B$$

식에서 l_{ac}는 활등 afc에 대한 길이 ($l_{ac} = 2R\sin\frac{\alpha}{2} = R$)이다.

힘 F의 결과식은

$$F = -\frac{9\sqrt{3}R^3}{5r}B \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

이 힘은 짧은 시간동안에 고리의 운동량이 변화되게 한다.

$$m\Delta v = F\Delta t = -\frac{9\sqrt{3}R^3}{5r}B \cdot \Delta B = -\frac{9\sqrt{3}R^3}{10r}\Delta B^2$$

우의 식에서 공식 $B \cdot \Delta B = \frac{1}{2}\Delta B^2$를 리용하면 고리는

$$v = -\frac{9\sqrt{3}R^3}{10mr}{B_0}^2$$

속도를 가지게 된다.

7. 원기둥구역안에 변하는 자기마당이 존재하므로 원기둥의 안과 밖의 공간에서 생겨나는 회리전기마당의 전력선은 원이며 원의 중심은 원기둥의 축과 같고 원의 면과 축선은 서로 수직이다. 이러한 전기마당에서 임의의 방향으로 전하가 이동할 때 전기마당의 합과 이동방향이 수직이므로 회리전기마당의 힘은 령으

로 된다. 따라서 반경방향의 임의의 회로에서 전동력은 0이다.

1) 임의의 점이 자기마당안에 있을 때 P가 임의의 점이라고 하면 $x \le 2\sqrt{R}$

그림 2-17-5에서 OA와 OP를 련결하면 회로 APOA가 닫긴다. 이때 회로의 전동력은 $\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_{\text{AP}} + \mathscr{E}_{\text{PO}} + \mathscr{E}_{\text{OA}}$

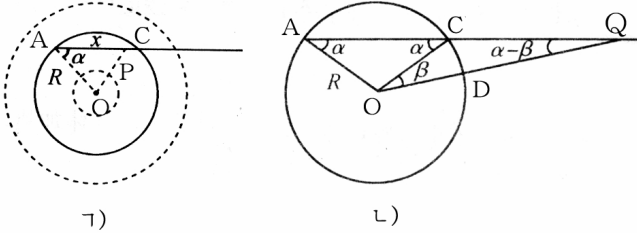



그림 2-17-5

식에서 $\mathscr{E}_{\text{AP}}$, $\mathscr{E}_{\text{PO}}$, $\mathscr{E}_{\text{OA}}$ 는 각각 A에서 P까지, P에서 O까지, O에서 A까지의 전동력이다. 앞의 분석으로부터 $\mathscr{E}_{\text{PO}} = 0$, $\mathscr{E}_{\text{OA}} = 0$ 이므로 $\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_{\text{AP}}$

△AOP의 면적을 S_1 이라고 하면 이 면적에서 자력선묶음량은 $\Phi_1 = BS_1$ 이다. 전자기유도법칙에 의해 회로의 전동력의 크기는

$$\mathscr{E}_1 = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = S_1 \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

주어진 조건에 의하여 $\mathscr{E}_1 = S_1 k$ 이므로

$$S_1 = \frac{1}{2} xR\sin\alpha = \frac{xR}{2\sqrt{2}}$$

여기로부터 AP선에 따르는 전동력의 크기는

$$\mathscr{E}_{\text{AP}} = \frac{kR}{2\sqrt{2}} x$$

2) 임의의 점이 자기마당밖에 있을 때 Q 를 임의의 점이라고 하면 $x > \sqrt{2}R$ 이다. 그림에서 OA, OQ를 련결하자. 회로 AQOQ가 닫기고 회로의 전동력이 $\mathscr{E}_1$ 이라고 하면 우와 류사한 방법으로 $\mathscr{E}_{\text{AQ}} = \mathscr{E}_2$

회로 AQOA에 대해 자력선묶음량은 회로가 둘러싸고있는

자기마당구역의 면적의 자력선묶음량과 같다. 이 면적을 S_2 이라고 하면 그것을 통과한 량은 $\Phi_2 = BS_2$ 이다. 전자기 유도법칙에 의해 회로의 전동력의 크기는 $\mathscr{E}_2 = S_2 k$ 이다. 그림에서 OC를 련결하면 $\angle \mathrm{Q} = \beta$, $\angle \mathrm{OQC} = \alpha - \beta$ 이다. 그리하여

S_2 =△AOC의 면적+부채형OCD의 면적=

$$= \frac{1}{2} R \sin\alpha \cdot 2R\cos\alpha + \frac{\beta}{2\pi}\pi R^2 = \frac{1}{2}R^2(\sin 2\alpha + \beta)$$

$\alpha = \frac{\pi}{4}$ 일 때 $S_2 = \frac{1}{2}R^2(1+\beta)$

△OCQ에서 $\dfrac{x-\sqrt{2}R}{\sin\beta} = \dfrac{R}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \beta\right)} \rightarrow \tan\beta = \dfrac{x-\sqrt{2}R}{x}$

$$\therefore \ S_2 = \frac{1}{2}R^2\left(1 + \arctan\frac{x-\sqrt{2}R}{x}\right)$$

마지막에 AQ선의 전동력의 크기는

$$\mathscr{E}_{\mathrm{AQ}} = \frac{1}{2}kR^2\left(1 + \arctan\frac{x-\sqrt{2}R}{x}\right)$$

8. 1) 실험순서를 쓰자.

① 피스톤 6을 조절하여 실관 8에서 색기둥이 적당한 위치에 있게 하고 발브 10을 막아 두쪽의 기체를 갈라낸 다음 색기둥의 위치를 기록한다.

② 스위치 S를 닫고 전류의 세기 I 를 잰다.

③ 스위치 S를 연다.

④ 색을 띤 액체가 오른쪽으로 이동한 거리 Δx 를 측정한다.

⑤ 전원전압을 바꾸고 다시 여러번 측정하여 I 와 Δx 의 값을 측정한다.

2) 스위치 S를 닫은 후 자기마당의 에네르기는 $W = \frac{1}{2}LI^2$ 이고 2극소자 D는 r 에서 전류가 흐르지 못하게 한다. 스위치 S를 연 후 L 에서 유도전동력이 생기므로 권선 L, 저항기 ab와 2극소자 D로 된 회로에 전류가 흐르며 마지막에 령으

로 된다. 이 과정에 원래 권선에 존재하는 자기마당의 에네르기는 r와 r_L을 통해 열로 방출된다. 그중 r에서 나오는 열량은

$$\Delta Q = \frac{1}{2}LI^2 \cdot \frac{r}{r + r_L}$$

이 열은 직접 시험관의 기체를 가열하여 온도가 올라간다. 이 과정은 등압변화과정이므로 기체의 흡수열은

$$\Delta Q = \frac{m}{\mu}C_P \cdot \Delta T$$

m은 기체의 질량, μ는 몰질량, ΔT는 올라간 온도이며 등압변화과정으므로 기체의 체적변화량은 ΔV이다. 리상기체상태방정식으로부터

$$P \cdot \Delta V = \frac{m}{\mu}R \cdot \Delta T$$

한편 $\Delta U = \frac{\pi d_2}{4}\Delta x$ 이므로

$$L = \frac{\Delta x}{I^2} \cdot \frac{r_L + r}{2r} \cdot \frac{C_P P \pi d^2}{R}$$

9. 원판이 자기마당속에서 속도 v로 수직으로 떨어질 때 원판의 두께방향으로 자력선을 자르므로 원판의 두께방향에서 생기는 유도전동력은 $\mathscr{E} = BDv$이다. 유도전동력 $\mathscr{E}$에 의해 원판의 앞과 뒤에 전하가 쌓이게 된다. 그림에서 앞판은 +전하를 띠는데 그것을 Q라고 하면 뒤판의 전하는 $-Q$이다. 원판의 앞과 뒤에서 평판축전기를 형성한다고 보면 그 전기용량은

$$C = \frac{\mathscr{E}\pi R^2}{D}$$

원판의 전기저항이 령이므로 유도전동력 $\mathscr{E}$는 축전기 량단의 전압 U와 같다. 그리하여 원판에 쌓인 전기량은 $Q = CU = \mathscr{E}\pi R^2 Bv$이다. 원판은 수직으로 아래로 떨어질 때 v가 끊임없이 변하므로 Q도 변화된다. 이것은 원판의 앞과 뒤에서 전류가 흐르게 한다.

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = (\mathscr{E}\pi R^2 B) \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

전류방향은 판의 뒤면에서 앞면으로 흐른다. 자기마당속에서는 우에서 서술한 전류가 흐르므로 원판이 받는 자기힘은

$$F = IDB = (\mathscr{E}\pi R^2 B^2 D)\cdot\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

원판이 수직으로 아래로 떨어지는 가속도는

$$a = g - \frac{F}{m}$$

원판의 질량 $m = \rho\pi R^2 D$

이다. 우의 세 식으로부터

$$a = g - \frac{\mathscr{E}B^2\Delta v}{\rho\Delta t} = g - \frac{\mathscr{E}B^2}{\rho}a$$

$$B = \sqrt{\frac{\rho}{\mathscr{E}}(\frac{g}{a} - 1)}$$

문제의 요구로부터 $g - a = 10^{-3}g$ 이다. 즉

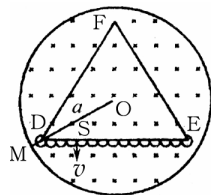
$$\frac{a}{g} = 1 - 10^{-3}, \quad \frac{g}{a} = 1 + 10^{-3}$$

이 식들을 B 에 넣으면

$$B = \sqrt{10^{-3}\frac{\rho}{\mathscr{E}}} = 10^{-6}\,\mathrm{T}$$

10. 대전립자들이 S점에서 DE에 수직으로 속도 v 로 나올 때 로렌쯔힘의 작용을 받아 등속원운동을 한다.(그림 2-17-6) 그 원이 중심은 반드시 DE사이에 놓이며 그 반경 R 는

그림 2-17-6

$$qvB = m\cdot\frac{v^2}{R} \quad\to\quad R = \frac{mv}{qB}$$

1) 이 립자가 매번 △DEF의 세 변과 충돌할 때 수직일것을 요구하므로 S점으로 돌아올수 있다. 이때 R와 v 는 다음의 조건을 만족시킨다.

① 변과 수직일 조건

충돌할 때 속도 v 는 변과 수직이므로 립자의 운동자리길의 원중심은 3각형의 변우에 위치하고있으므로 립자가 3각형의 정점 D, F, E를 지날 때 반드시 서로 이웃할 사귐점에 놓이게 된다. 립자가 S점에서 출발하여 오

른쪽으로 원운동을 하면 그 자리길은 반경이 R인 반원으로 된다. 변 SE에서 마지막 충돌점과 E점사이의 거리는 R이다. 그러므로 $\overline{SE}$의 걸이는 R의 홀수배이다. 립자가 변 FD로부터 D점을 지나 S점으로 되돌아올 때 상태가 비슷하므로 $\overline{DS}$의 길이도 반경의 홀수배이다. $\overline{DS}=R_1$라고 하면 $\overline{DS}$의 길이는 R의 홀수배여야 한다는 요구를 만족한다.

$$R=R_n=\frac{\overline{DS}}{2n-1}, \quad n=1, 2, 3, \cdots$$

이때 립자가 3각형의 변을 따라 수직으로 충돌하므로 R는 반드시 아래의 조건을 만족시켜야 한다.

$$R=R_n=\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{4}=\frac{2a}{5(2n-1)}$$

이때 $\overline{SE}=3\overline{DS}=(6n-3)R_{\mathrm{n}}$, n=1, 2, 3, ⋯

$\overline{SE}$는 R_{n}의 홀수배가 되여야 한다는 조건을 응당 만족시킨다. 다만 립자가 E점과 EF변을 지날 때 서로 충돌하므로 대칭관계로부터 다음 충돌은 3각형과 수직으로 된다.

② 립자가 정점을 에돌고 3각형의 변과 충돌할수 있는 조건; 자기마당이 반경 a인 원기둥범위안에만 분포되여있다. 그러므로 립자가 E점을 에돌아 운동할 때 원자리길과 자기마당의 변두리가 사귀게 되면 이 립자는 그 사귐점에서 속도방향을 따라 직선운동을 하게 되므로 되돌아올수 없다. 따라서 립자의 원운동반경 R가 너무 크면 안된다. 그림에서 보는것처럼 $R\le\overline{DM}$ (3각형정점으로부터 원기둥의 반경방향을 따라 자기마당변두리까지의 거리가 $R=\overline{DM}$으로 되면 립자의 원운동자리길과 원기둥형자기마당의 변두리가 서로 접하게 된다.)으로 되여야 하며 주어진 수값들을 넣어 계산하면

$$\overline{DM}=\left(1-\frac{8\sqrt{3}}{15}\right)a\approx 0.076a, \quad n= 1, 2, 3, \cdots$$

를 식 $R_n=\dfrac{2a}{5(5n-1)}$에 넣으면

$$n=1,\quad R_1=\frac{2a}{5}=0.4a$$

$$n=2,\quad R_2=\frac{2a}{15}=0.133a$$

$$n=3,\quad R_3=\frac{2a}{25}=0.08a$$

$$n=4,\quad R_4=\frac{2a}{35}=0.057a$$

R_1, R_2, R_3 $\geq \overline{\mathrm{DM}}$ 이므로 이 립자들은 3각형의 정점 E를 지날 때 자기마당의 변두리를 넘어나오므로 $n\geq 4$ 개의 립자만이 여러번 충돌을 하여 E, F, D점을 지나 마지막에 S점으로 돌아온다. 이 결론과 관계되는 식으로부터 대응하는 속도는

$$v_n=\frac{qB}{m}R_n=\frac{qB}{m}\cdot\frac{2a}{5(2n-1)},\quad n=4, 5, 6 \cdots$$

이것은 S점에서 나온 립자가 3각형의 세 변과 수직으로 충돌하면서 마지막에 S점으로 돌아올 때 그 속도의 크기가 만족해야 할 조건이다.

2) 이 립자들이 자기마당속에서 원자리길운동을 할 때 주기는

$$T=\frac{2\pi R}{v}$$

이 식에 $R=\frac{mv}{qB}$ 을 넣으면

$$T=\frac{2\pi m}{qB}$$

B와 q이 주어졌을 때 T와 v는 무관계하다. 립자가 S점에서 출발하여 마지막에 S점으로 되돌아오는 과정에 3각형의 둘레와 충돌하는 수가 작을수록 통과시간이 짧다. $n=4$를 취하면(그림에서 변 DE의 충돌과정을 그렸다.) 이때 립자의 속도는 v_4로 된다. 그림으로부터 립자의 자리길은 3×13개의 반원과 중심각이 300° 인 3개의 원둘레를 나타내며 시간은

$$t=3\times 13\times\frac{T}{2}+3\times\frac{5}{6}T=22T=\frac{44\pi m}{qB}$$

제18장 광학

1. 2)

풀이방향. S의 영상이 S′라고 하면 거울의 이동과정에서 S와 S′는 처음부터 마지막까지 한 직선상에 있다. 그러므로 S′는 S′S를 련결하는 직선을 따라 S를 향해 이동한다. S′와 S의 위치관계로부터 2)가 선택된다

2. 2), 4)

풀이방향. 간섭무늬의 너비와 거리, 빛파장사이의 관계를 생각하여라.

3. 3)

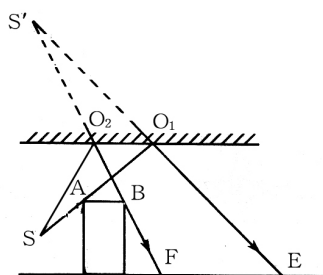
풀이방향. 간섭을 일으키는 얇은 층은 a, b 사이의 얇은 공기층이다. 이때 생기는 간섭빛은 a의 아래겉면과 b의 웃겉면에서의 반사빛이다.

4. 볼록렌즈, 붉은색, 노란색, 풀색

5. 점광원 S로부터 각이한 방향으로 수많은 빛선들이 나간다.(그림 2-18-1) 그가운데서 다음과 같은 두개의 빛선을 택하면 물체의 오른쪽 부분의 땅면에서 조명되여 밝아진 구역을 결정할수 있다. 그 하나는 광원 S로부터 떠나 물체우의 A점을 지나 평면거울에서 반사된 다음 땅면에 도달하는 빛선이다. 다른 하나는 광원 S에서 출발하여 직접 평면거울로 갔다가 반사되면서 물체우의 점 B를 지나 땅면에 도달하는 빛선이다. 이런 빛선들을 <경계빛선>이라고 부른다. 이러한 류형의 문제들을 푸는데서 주되는 고리는 경계빛선들을 찾아내는 방법을 생각해내는것이다.

그림 2-18-1

1) 평면거울에서 영상이 형성되는 특성을 리용하여 광원 S의 영상위치 S′를 구한다.

2) 빛선 SA를 그리고 그것을 O_1점까지 련결하고 $S'O_1$를 련결

한 연장선이 땅면과의 사귐점을 E라고 한다. 그중 $S'O_1$는 접선을 친다.

3) $S'B$를 련결하고 그 연장선이 땅면과 사귀는 점을 F라고 한다. $S'B$와 거울면의 교차점은 O_2, $S'O_2$은 접선으로 그리고 SO_2을 련결한다. 그림에서 E, F사이의 땅면은 밝은 부분이다.

6. 1) 빛행로는 그림 2-18-2의 ㄱ를 보라.

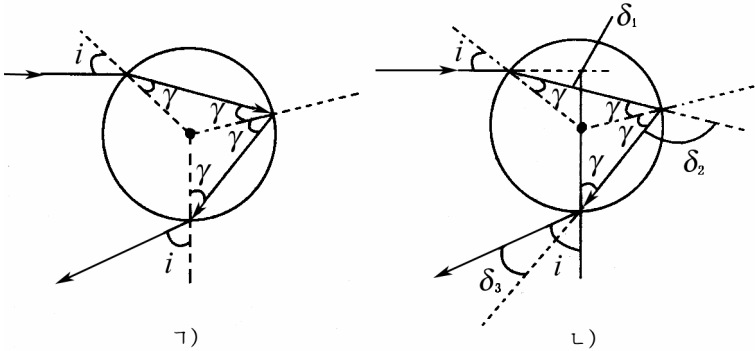



그림 2-18-2

2) 그림 2-18-2의 ㄴ에서

$$\frac{\sin i}{\sin \gamma} = n$$

이므로 문제의 그림 1-18-6에서 알수 있는바와 같이

$$\sin i = \frac{d}{R}, \qquad i = \sin^{-1}\frac{d}{R}, \qquad \gamma = \sin^{-1}\frac{d}{nR}$$

그림으로부터

$$\delta_1 = \sin^{-1}\frac{d}{R} - \sin^{-1}\frac{d}{nR}$$

$$\delta_2 = \pi - 2\sin^{-1}\frac{d}{nR}$$

$$\delta_3 = \sin^{-1}\frac{d}{R} - \sin^{-1}\frac{d}{nR}$$

7. 빛선이 빛축에 평행이므로 밝은 원의 반경 R는 렌즈의 반경과 같고 막우에서 반경이 $R/2$인 밝은 원에 대응하는 영상의 점은 두개 있다.(그림 2-18-3) 영상까지의 거리 b와 b'는 각각

$$\frac{b-2f}{R/2}=\frac{b}{R},\quad \frac{2f-b'}{R/2}=\frac{b'}{R}$$

를 만족시킨다. 렌즈의 공식

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$$

을 리용하면 얻어진 점광원과 렌즈중심사이의 거리는 각각

$$a=\frac{4f}{3},\quad a'=4f$$

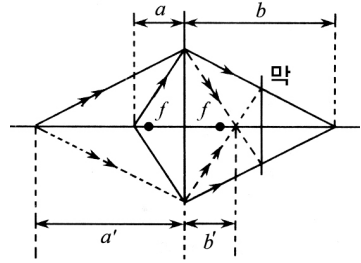



그림 2-18-3

8. 빛이 지나는 과정에 공기중에서 먼지를 만나는데 이 먼지들이 빛을 산란시키므로 우리는 《빛선》을 보게 된다. 빨갛게 단 가위의 온도가 높으므로 주위의 먼지들은 가열된 공기에 의해 옆으로 퍼져나오고 잠시동안 가위주위에 먼지가 없는 공간을 형성한다. 다시말하여 빛을 산란시킬수 없다. 그러므로 가위주위에서 빛선이 보이지 않는다.

9. 그림 2-18-4에서처럼 볼록렌즈의 변두리에서 굴절되여 눈 C로 들어오는 두 빛선 A′C와 B′C를 그린다. A′C에 평행이면서 O점을 지나는 빛선과 AA′선의 사귐점은 평면 A에 놓이게 된다. AF=FB 이고 BB′를 련결하며 BC는 그림으로부터 알수 있다.

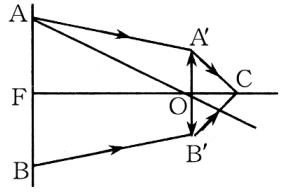



그림 2-18-4

$$\Delta \mathrm{AFO} \backsim \Delta \mathrm{A'OC}$$

따라서

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{A'O}}=\frac{\mathrm{FO}}{\mathrm{OC}} \quad\rightarrow\quad \mathrm{AF}=\frac{\mathrm{FO}}{\mathrm{OC}}\mathrm{A'C}=4\mathrm{cm}$$

$$\mathrm{AB}=2\mathrm{AF}=8\mathrm{cm}$$

관찰된 규격수

$$n=\frac{\mathrm{AB}}{0.3}=26.7$$

즉 관측된 완전한 네모칸의 수는 26개

10. 라지오파별은 무한히 먼곳에 있다고 볼수 있다. 그것이 내보내는 전자기파는 거시적으로 평행빛선이라고 볼수 있다. 빛묶음에서 일부가 직접 수신기 S에 들어오고 일부는 바다물면에서 반사된 후 S′에 들어온다. 그림에서 허영상 S′는 수신기

S와 등가라고 볼수 있다. 그림 2-18-5에서 SP는 평면파의 파면인데 전파방향에 수직이다. 이 두 개의 수신신호사이의 행로차는 그림으로부터 $\overline{S'P}=2h\sin\theta$ 라는것을 쉽게 계산할수 있다. 반파장손실을 고려하면 두 신호파의 행로차는

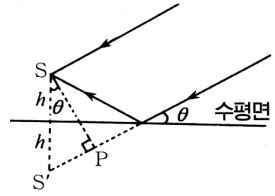



그림 2-18-5

$$\Delta = S'P + \frac{\lambda}{2} = 2h\sin\theta + \frac{\lambda}{2}$$

간섭의 극대조건 $\Delta = k\lambda$ 에 의하여 극대가 이루어지는 각은

$$\theta = \arcsin\left[\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)\lambda}{2h}\right] =$$

$$= \arcsin\left[5.25\times10^{-2}\left(k-\frac{1}{2}\right)\right], \quad k=1, 2, 3,$$

간섭의 극소조건은

$$\Delta = \left(k-\frac{1}{2}\right)\lambda, \qquad k=1, 2, 3, \ldots$$

수신기가 기록하는 극소값에 대응하는 각은

$$\theta = \arcsin\frac{k\lambda}{2h} = \arcsin(5.25\times10^{-2}k), \qquad k=1, 2, 3, \cdots$$

2) 라지오파별이 방금 지평선에서 떠올랐을 때 대응하는 각은 $\theta=0$ 이다. 수신기가 기록하는 간섭신호는 최소로 되고 떠올라서 각 θ가 커지면 기록된 간섭신호도 커진다.

11. 작도법. 그림 2-18-6에서 두개의 점 B와 F를 련결하고 이 BF를 직경으로 하는 원을 그린다.

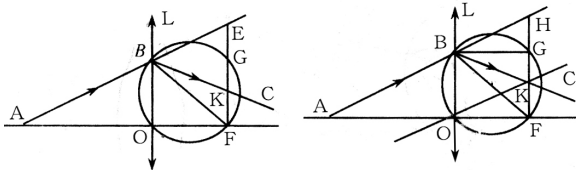



그림 2-18-6

빛선 AB를 연장시키고 눈금자의 어떤 눈금을 F점에 맞추고 눈금자를 F점주위로 회전시킨다. 선분 FK(K점은 BC우에 놓

는다.)가 EQ와 같게(G점은 원둘레우에 놓는다.) 한다. F점을 지나 EF에 수직인 선을 그리고 원둘레와의 사귐점을 O라고 한다. O점은 이 렌즈와의 중심점이고 FO는 빛축우에 놓인다.(그림의 ㄴ를 리용하여 이 작도법이 옳다는것을 확인해보아라)

12. 그림과 같이 물면중심을 원점으로 잡고 직각자리표계를 설정하자.(그림 2-18-7) 액면의 곡선방정식 $y=f(x)$, 액면의 임의의 점 $P(x, y)$를 잡자. P점의 작은 물방울은 중력과 액면의 맞선힘의 작용을 받는다. 그 합력은 물방울을 원운동시키는 향심력으로 된다.

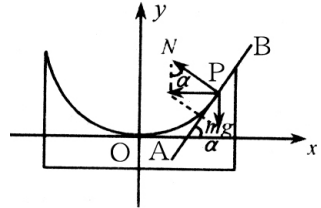



그림 2-18-7

$$\tan\alpha = \frac{F_{향}}{mg} = \frac{mx\omega^2}{mg} \qquad (1)$$

직선 AB는 곡선 $y=f(x)$의 점 P에서의 접선인데 x축과 이루는 각은 α이다. 이로부터

$$\tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (2)$$

식 1과 2로부터

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\omega^2}{g}x$$

을 얻는다. 그리하여 액면의 곡선방정식은

$$y = \frac{\omega^2}{2g}x^2$$

으로 된다. 그리하여 $x=10.5\text{mm}$일 때

$$y = \frac{(10.5\times10^{-3})\omega^2}{(2\times9.8)}$$

이때

$$\frac{\lambda}{n}\times20 = 2y$$

이로부터 $\omega=0.9\text{rad/s}$

13. 물체 AB에서 나온 빛이 프리즘의 경사면에서 전반사될 때 그의 왼쪽에 영상이 형성된다. 그러나 이 영상의 위치를 구할 때 평면거울에서 쓰던 방법을 그대로 쓸수 없다. 왜냐하면 빛

선이 직각변을 통과할 때 일반적으로 굴절빛선이 생기기때문이다. 경사면에서 볼 때 물체 AB는 프리즘 웃쪽의 직각변으로부터 $h_1 = nh = 9\text{cm}$ 만큼 떨어져있는것으로 된다. 그리고 프리즘의 경사면을 통해 형성되는 영상은 프리즘의 왼쪽(그림에 보여준 프리즘의 주축에 수직)에 놓이는데 오른쪽 직각변까지의 거리 $l = (h_1 + 3 + 3) = 15(\text{cm})$로 된다. 그러나 프리즘오른쪽에 있는 볼록렌즈에서 보면 프리즘의 오른쪽 변으로부터 이 영상까지의 거리가 실제거리보다 더 긴 $h_2 = L/n = 10\text{cm}$로 된다. 따라서 볼록렌즈에 대해

$$a_1 = 10 + 10 = 20(\text{cm})$$

이며 볼록렌즈의 공식

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_1}$$

로부터 $b_1 = 20\text{cm}$이다. 오목렌즈에 대해서 보면

$$a_2 = d - b_1 = -5\text{cm}$$

이며 렌즈공식

$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{f_2}$ 로부터 결과 오목렌즈로부터 오른쪽에 10cm 되는 곳에 거꾸로선 실영상이 얻어진다. 영상의 배률은

$$f = \left|\frac{b_1}{a_1}\right| \cdot \left|\frac{b_2}{a_2}\right| = 2$$

이다.

14. 그림 2-18-8과 같이 유리판을 Oy 평면에 평행인 수많은 얇은 층으로 나눈다. 매 얇은 층들에서 굴절률은 같다고 하자.

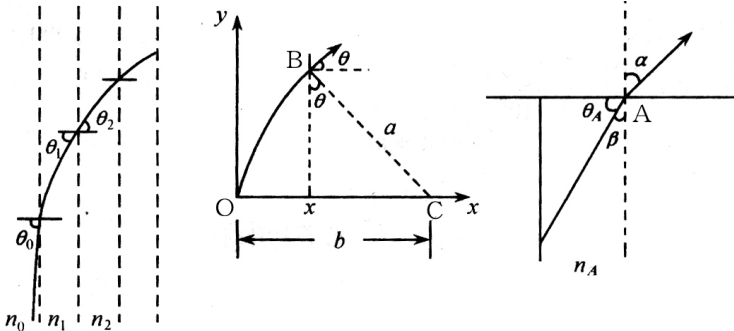



그림 2-18-8

굴절법칙에 의하면

$$n_0 \sin\theta_0 = n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 = \cdots = n \sin\theta$$

이다. 이때 x 위치의 얇은 층에서 굴절률은 n 이다. 얇은 층의 굴절빛선은 빛선경로의 일부분이다. 이것이 얇은 층경계와 이루는 각은 굴절법칙에 의하여

$$\left(\theta_0 = \frac{\pi}{2}\right) n_0 = n \sin\theta$$

여기에 $n(x)$ 를 갈라넣으면

$$\sin\theta = \frac{n_0}{n} = 1 - \frac{x}{r}$$

로 된다. 굴절빛선에 수직선 BC를 그리고 그 길이를 a, CO의 길이를 b 라고 하면 그림으로부터

$$\sin\theta = \frac{b-x}{a} = \frac{b}{a} - \frac{r}{a}$$

우의 두 식들을 비교하면 $a = b = r$ 이다. 우의 얇은 층은 임의로 취한것이므로 빛경로의 임의의 얇은 층에서 모두 성립한다. 빛경로는 C를 중심으로 반경이 r 인 원을 그리며 원의 방정식은

$$(x-r)^2 + y^2 = r^2$$

점 A에서 유리판의 굴절률을 구하자.

점 A의 얇은 층의 굴절률을 n_A 라고 하자.

굴절법칙에 따라

$$n_A = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\alpha}{\cos\theta_A}$$

$n_0 = n_A \sin\theta_A$ 의 관계에 있다. 즉

$$\sin\theta_A = \frac{n_0}{n_A}, \qquad \cos\theta_A = \sqrt{1 - \left(\frac{n_0}{n_A}\right)^2}$$

우의 두 식은 련립하면

$$n_A = \sqrt{n_0 - \sin^2\alpha} = 1.3$$

유리판의 두께 d 를 구하자.

판의 두께 d 는 $x = x_A$ 일 때의 y 값이다. 빛선의 경로방정식

$(x-r)^2 + y^2 = r^2$ 과 $n(x) = n_0 \left(1 - \dfrac{x}{r}\right)^{-1}$ 으로부터

$x_A = 1\text{cm}, \qquad d = y(x_A) = 5\text{cm}$

제19장. 현대물리초보

1. 4)

풀이방향. 빛전자의 처음최대운동에네르기는 오직 입사빛의 진동수에만 관계가 있다.

2. 4)

풀이방향. 바닥상태의 수소원자가 려기된 후 3개의 단색빛을 내보내는데 이것은 이 수소원자가 3개의 려기준위로 이행했다는것을 말해준다.즉 입사빛의 에네르기가 $h(v_1+v_2)$ 이며 진폭과 파장사이의 관계식으로부터 입사빛의 에네르기를 구할수 있다.

3. 2)

풀이방향. 전기량보존의 견지에서 생각한다.

4. $r_3=9r_1$, $E_K=\dfrac{ke^2}{18r_1}$

풀이방향. 꿀롱의 법칙, 원운동의 특성 및 보아의 량자가정을 결합하여 얻을수 있다.

5. 1) 아인슈타인공식 $E=mc^2$ 을 리용하여 구한다.

$$m=\frac{E}{c^2}=\frac{3.8\times10^{26}}{(3\times10^8)^2}=4.2\times10^6(\mathrm{t})$$

2) 매번 28MeV의 에네르기를 내보내는것은 두개의 중성미자를 내보내는것에 대응된다. 이 중성미자들은 고르롭게 밖으로 복사된다고 보며 태양과 땅사이의 거리를 반경으로 하는 큰 구면우에 분포되여있다고 볼수 있다. 이로부터 지구겉면의 $1\mathrm{m}^2$당 중성미자수를 계산할수 있다. 태양이 매1s당 내보내는 중성미자수는

$$\frac{3.8\times10^{26}}{28\times1.6\times10^{-13}}\times2=1.7\times10^{38}(\text{개})$$

지구와 태양사이의 거리를 반경으로 하는 구면우에 고르롭게 분포되여있으므로 매 $1\mathrm{m}^2$당 중성미자수는

$$\frac{1.7\times10^{38}}{4\times3.14\times(1.5\times10^{11})^2}=6\times10^{14}(\text{개})$$

3) 먼저 전체 질량에서 매 1s마다 감소되는 양성자의 질량을

구하고 다시 양성자의 질량과 매 1s마다 감소되는 양성자의 질량을 비교하면 시간을 구할수 있다. 매 1s당 감소되는 양성자의 질량은

$$\frac{3.8\times10^{26}}{28\times1.6\times10^{-13}}\times4\times1.67\times10^{-27}=5.7\times10^{11}(\text{kg})$$

태양의 수명은

$$\frac{2\times10^{30}\times10\%}{5.7\times10^{11}}=3.5\times10^{17}=110\text{억}(\text{년})$$

6. 남아있는 ^{24}Na이 매 1s마다 내보내는 립자수는

$$N_t=N_0\left(\frac{1}{2}\right)^{t/T}=2\,000\times\left(\frac{1}{2}\right)^{7.5/15}=1.41\times10^3(\text{개})$$

뽑아낸 혈액 1mL는 매 1s마다 $N=0.24$개를 내보낸다. 그리하여

$$\frac{V}{1}=\frac{N_t}{N}=5.9\times10^3$$

즉 혈액의 전체 량은 5.9×10^3mL$=5.9$L

7. 1) 매 1s마다 내보내는 전자수는

$$\frac{0.56\times10^{-6}}{1.6\times10^{-19}}=3.5\times10^{12}(\text{개})$$

2) 매개 빛량자의 에네르기는

$$\frac{hc}{\lambda}=\frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^8}{300\times10^{-9}}=6.63\times10^{-19}(\text{J})$$

나트리움의 에네르기는

$$\frac{hc}{\lambda_0}=\frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^8}{500\times10^{-9}}=3.98\times10^{-19}(\text{J})$$

매 전자가 전기마당속에서 가속되여 얻게 되는 에네르기는

$$eU=1.6\times10^{-19}\times2.1=3.36\times10^{-19}(\text{J})$$

에네르기보존의 법칙으로부터 전자의 최대운동에네르기는

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{hc}{\lambda}-\frac{hc}{\lambda_0}+eU=6.01\times10^{-19}(\text{J})=3.76\text{eV}$$

빛의 세기가 3배로 될 때 우의 결과는 변하지 않는다.

8. $E=hv$와 $P=h/\lambda$ 및 진공속에서의 빛의 속도 $c=\lambda v$로부터 립자의 에네르기와 운동량사이의 관계를 얻기 쉽다.

$$E = Pc$$

t 시간동안 나오는 빛량자의 수를 n 이라고 하고 매개 빛량자의 에네르기를 E 라고 하며 운동량을 P 라고 하자. 레이자빛이 전부 물체에 떨어졌다가 반사된다고 하자. 이때 레이자빛이 물체에 주는 빛압력은 최대로 된다. 이 압력을 P 라고 하면

$$P_0 = \frac{n}{t}E, \quad F = \frac{n}{t} \cdot 2P, \quad P = \frac{F}{S}$$

$E = Pc$ 를 갈아넣으면

$$P = \frac{2P_0}{cS}$$

그러므로

1) $P = \frac{2P_0}{cS} = \frac{2 \times 10^3}{3 \times 10^8 \times 10^{-6}} = 6.7\,(\mathrm{Pa})$

2) 같은 방법으로

$$P = 9 \times 10^{-6}\,\mathrm{Pa}$$

뉴톤의 제2법칙에 따라

$$a = \frac{PS}{M} = 7.2 \times 10^{-3}\,\mathrm{m/s^2}$$

이 가속도는 비록 작지만 오랜 시간 가속되면 관측할수 있는 속도를 얻을수 있다. 이것은 먼거리에 있는 우주공간에 대한 관측을 진행할수 있게 한다.

9. $E = h\nu$ 와 $E = mc^2$ 으로부터

$$m = \frac{h\nu}{c^2}$$

빛량자가 우에로 오를 때 끌힘이 작용하여 빛량자에네르기는 감소되여 계의 자리에네르기로 넘어간다.

1) $E = h\nu$

2) $E = mc^2$

3) $m = \frac{h\nu}{c^2}$

4) $h\Delta\nu = mg\Delta H = \frac{h\nu g\Delta H}{c^2}$

따라서

$$\frac{\Delta v}{v_0}=\frac{g\Delta H}{c^2}=\frac{10\times 22.5}{3\times 10^8}=2.5\times 10^{-15}$$

10. μ 중간자의 속도와 진공속에서 빛속도의 비를 β 라고 하면

$$\tau=\frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}},\qquad \sqrt{1-\beta^2}=\frac{\tau_0}{\tau}=\frac{2}{7}$$

μ 중간자의 운동질량 m과 정지질량 m_0 사이에는

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{7}{2}m_0$$

의 관계가 있다. 전자의 정지질량을 m_e 라고 하면

$$\frac{m}{m_0}=\frac{7m_0}{2m_e}=\frac{7}{2}\times 207=724.5$$

11. 수소원자의 바닥상태의 에네르기는 $E_1=-E$, 제1려기상태의 에네르기는 $E_2=-\frac{1}{4}E$, 이때 수소원자는 $\Delta E\geq E_2-E_1=\frac{3}{4}E$ 만한 에네르기를 얻을 때만 바닥상태에서 려기상태로 이행한다. 이 에네르기보다 작으면 수소원자는 흡수되지 못하고 튐성충돌을 일으킨다. 그런데 두개의 수소원자가 충돌과정에 손실되는 에네르기량은 우의 수값보다 작다. 그러므로 같은 조건에서 두개의 수소원자가 직충돌할 때 에네르기손실이 가장 크다. 두 원자의 상대속도를 v 라고 하면 충돌후 두 원자는 서로 멈춰선다. 이때 손실되는 에네르기량은

$$\Delta E'=2\cdot\frac{1}{2}mv^2-0=mv^2$$

따라서 수소원자를 려기시키려면 $\Delta E'=\Delta E$ 를 만족시켜야 한다. 즉

$$mv^2=\frac{3}{4}E,\quad v=\sqrt{\frac{3E}{4m}}=3.16\times 10^4\,\mathrm{m/s}$$

두 수소원자는 $3.16\times 10^4\,\mathrm{m/s}$ 보다 큰 속도로 상대적으로 운동하여야 충돌할 때 려기되며 비튐성충돌을 일으킨다.

12. 1) 중성자의 질량을 m 이라고 하고 탄소핵의 질량을 M 이라고 하자. 1차충돌후 중성자와 탄소핵의 속도는 v_1, v_2 이다. 충돌과정에 운동량보존법칙에 따라 $mv_0=mv_1+Mv_2$ 이다.

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}Mv_2^2$$

우의 식들을 풀면

$$v_1 = \frac{m-M}{m+M} v_0 = -\frac{11}{13} v_0$$

여기로부터 1차충돌후 중성자의 운동에네르기는

$$E = \frac{1}{2} m v_1^2 == \frac{1}{2} m \left(\frac{11}{13} v_0 \right)^2 =$$

$$= \left(\frac{11}{13} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2} m v_1^2 \right) = \left(\frac{11}{13} \right)^2 E_0$$

로 작아진다.

2) n차충돌후 중성자의 운동에네르기가 E_n으로 감소한다면

$$E_n = \left(\frac{11}{13} \right)^{2n} E_0, \quad \frac{E_n}{E_0} = \left(\frac{11}{13} \right)^{2n}$$

로그를 취하고 $E_n = 0.025\text{eV}$ 하고 하면

$$\lg \left| \frac{E_n}{E_0} \right| = 2n \lg \frac{11}{13}$$

즉 $n = 54$차

13. 스펙트르의 실험값 λ/λ_0은

$$\frac{9}{5}, \quad \frac{4}{3}, \quad \frac{25}{21}, \quad \frac{9}{8}$$

2번째마디와 4번째마이의 분자와 분모에 동시에 4를 곱하면

$$\frac{9}{5}, \quad \frac{16}{12}, \quad \frac{25}{21}, \quad \frac{36}{32}$$

우의 수렬을 다시 쓰면

$$\frac{9}{9-4}, \ \frac{16}{16-4}, \ \frac{25}{25-4}, \ \frac{36}{36-4}, \ \cdots$$

혹은

$$\frac{3^2}{3^2-2^2}, \ \frac{4^2}{4^2-2^2}, \ \frac{5^2}{5^2-2^2}, \ \frac{6^2}{6^2-2^2}$$

즉

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{n^2}{n^2-2^2}, \quad n = 3, \ 4, \ 5, \ \cdots$$

따라서

$$\lambda = \lambda_0 \frac{n^2}{n^2 - 2^2}$$

파장의 거꿀수를 리용하면

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_0} \cdot \frac{n^2 - 2^2}{n^2} = \left(\frac{2}{\lambda_0}\right)^2 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

즉

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

식에서 리드베르그상수

$$R = \frac{2^2}{\lambda_0} = \frac{4}{364.561} = 1.0972 \times 10^{-2}\,\mathrm{nm}^{-1} = 1.097\,2 \times 10^7\,\mathrm{m}^{-1}$$

14. 1) 이온화에네르기는 He^+의 바깥전자가 He^+핵의 속박으로부터 떨어져나가는데 필요한 에네르기를 표시하므로 최소에네르기는 핵밖의 전자가 바닥상태에서 첫번째려기상태로 이행하는데 드는 에네르기와 대응한다. 따라서

$$E_{최소} = E\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) = 40.8(\mathrm{eV})$$

이다.

2) 만일 이온의 반작용을 고려하지 않으면 제1려기상태에서 바닥상태로 이행할 때 나오는 빛량자는 $E_{최소} = h\nu_0$만 한 에네르기를 가진다. 이온의 반작용을 고려하면 빛량자의 진동수는 ν_0이 아니라 ν로 되며 이때의 이온의 운동에네르기는 $\frac{1}{2}mv^2$이다. 에네르기보존법칙으로부터

$$E_{최소} = h\nu + \frac{1}{2}mv^2$$

을 얻으며 운동량보존법칙으로부터

$$mv = \frac{h\nu}{c}$$

를 얻는다. 이 식에서 mv는 반작용을 고려한 이온의 운동량크기이며 $\frac{h\nu}{c}$는 복사되는 빛량자의 운동량크기이다. 이때 파장의 상태변화는

$$\frac{|\Delta\lambda|}{\lambda_0}=\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda_0}=\frac{v_0-v}{v}=\frac{hv_0-hv}{hv}$$

이며 여기로부터

$$\frac{|\Delta\lambda|}{\lambda_0}=\frac{Mv^2/2}{Mvc}=\frac{Mvc}{2Mc^2}=\frac{hv}{2Mc^2}$$

이다. $Mc^2 \gg hv \gg h(v-v_0)$ 이므로

$$\frac{|\Delta\lambda|}{\lambda_0}=\frac{hv_0}{2Mc^2}+\frac{h(v-v_0)}{2Mc^2}\approx\frac{hv_0}{2Mc^2}$$

이며 수값을 넣으면

$$\frac{|\Delta\lambda|}{\lambda_0}=5.4\times10^{-9}$$

이고 변화률은 0.000 000 54%이다.

15. 1) 그림 2-19-1과 같이 양성자의 질량을 m, 전기량을 $-q$ 라고 하면

$$r=\frac{mv}{qB}$$

반양성자의 질량을 m, 전기량을 q 라고 하면 그 자리길반경은 $r_1=r$ 이지만 기울어지는 방향은 서로 반대로 된다. 즉

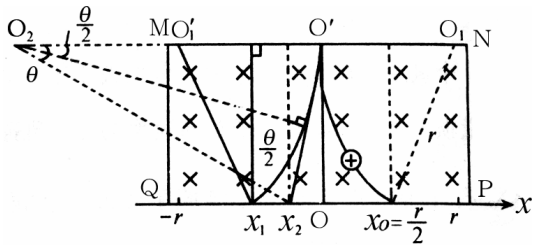



그림 2-19-1

$$x_1=-x_0=-\frac{r}{2}$$

반헬리움핵(반 α 립자)의 질량이 $4m$, 전기량이 $-2q$ 로 되므로 그 자리길반경은

$$r_2=\frac{4mv}{2qB}=2r$$

$$x_2=-r\cos30°\times\tan\frac{\theta}{2}=-r\cos30°\times\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{3r}{9+2\sqrt{3}}$$

2) ① 반경이 R 인 구면안의 물질의 질량은

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

P에 대한 만유인력

$$f_{내} = G \cdot \frac{Mm}{R^2} = \frac{4}{3}\pi R \rho Gm$$

구밖의 모든 물질은 무수한 공간의 중심물질의 껍질의 총체라고 볼수 있다. 밀도가 고르로운 구껍데기와 그안의 임의의 점과의 끌힘은 령이다. 그러므로 지구밖의 모든 물질이 P에 대한 끌힘은 $f_{외} = 0$ 이다. 우의 두 부분을 종합하면 우주속의 모든 물질이 P에 대한 전체 끌힘은

$$f = f_{내} + f_{외} = \frac{4}{3}\pi R \rho G m$$

② $$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho, \quad E_{\rho} = -\frac{4}{3}\pi R^2 \rho G m$$

이므로 행성계 PP의 움직임은 지구겉면에서 물체를 던지는것과 같이 볼수 있다. 처음운동에네르기가 전부 끌힘의 자리에네르기로 넘어가면 전체 에네르기는 $E = 0$ 이다. 즉

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{4}{3}\pi R^2 \rho G m = 0$$

그리고 $v = HR$ 를 갈아넣으면

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

으로 만들수 있다.

3) $\rho \le \rho_c$ 일 때

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{4}{3}\pi R^2 \rho G m \ge 0$$

즉

$$v^2 \ge \frac{8}{3}\pi R \rho G = \frac{2GM}{R}$$

M 은 상수이므로 행성계 P는 비록 R 가 커진다해도 감속된다. 그러나 별사이의 거리 R 의 증가는 제한이 없다. 즉 우주는 영원히 팽창된다. $\rho > \rho_c$ 인 때

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{4}{3}\pi R^2 \rho G m < 0$$

즉

$$R < \frac{2GM}{c^2} = R_{최대}$$

(c는 빛속도, 여기로부터 알수 있는바와 같이 행성계사이의 거리가 최대값 $R_{최대}$에 도달했을 때 우주의 팽창도 멎고 줄어들기 시작한다.)

제20장. 광학과 현대물리초보종합문제

1. $t=0$인 때로부터 실험을 시작했다고 하면 전체 핵자의 수는 N_0이고 t시각일 때 핵자의 수를 N, 핵자의 평균수명이 τ라면

$$N = N_0 e^{t/z}$$

$\frac{t}{\tau} \ll 1$이므로

$$N \approx N_0\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)$$

$$N_0 = \frac{6\times 10^4}{1.66\times 10^{-27}} = 3.6\times 10^{31}$$

$$\tau = \frac{N_0}{N_0 - N_t} = 1.8\times 10^{31}\text{년}$$

2. 광학계에서 왼쪽과 오른쪽이 대칭이므로 물체와 영상도 왼쪽과 오른쪽에서 대칭이며 빛경로도 왼쪽과 오른쪽이 대칭이다. 빛선은 프리즘부분에서 빛축과 평행이다. S에서 나온 빛이 L_1의 중심을 지나는 경로는 그림 2-20-1과 같이 표시된다. 대칭성으로부터 $i_1 = \gamma_2$, $i_2 = \gamma_1$이며 기하학적관계로부터 $i_1 + i_2 = \alpha = 60°$이다. 그림으로부터 $i_1 = \beta + \gamma_1$이고 Δ FSO_1의 함수관계로부터

$$\tan\beta = \frac{y}{f}$$

이다. 여기에 수값을 넣으면 $\beta = \arctan\frac{14.3}{30} = 25.49°$

$\gamma_1 = 30°$ 이고 $i_1 = 55.49°$ 이므로 굴절법칙으로부터

$$n = \frac{\sin i_1}{\sin \gamma_1} = 1.65$$

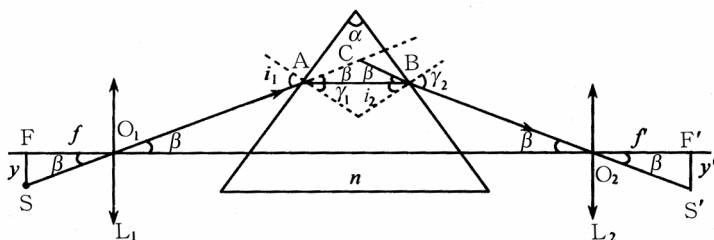



그림 2-20-1

3. 그림 2-20-2와 같이 면 AC우의 임의의 점 a에서 빛선의 굴절상태를 분석하자. 여러 방향의 빛선이 이 면에 비쳐진다. 렌즈와 공기를 비교하면 렌즈가 밴매질이므로 굴절각은 어떠한 각 γ_0 보다 클수 없다. γ_0 은 $\sin\gamma_0 = \frac{1}{n}$ 식으로 결정되므로 a점에서 나온 빛선은 각각 $\gamma_0' = \gamma_0 - \alpha$ 와 $\gamma_0'' = \gamma_0 + \alpha$ 로 나누어지며 AB면우의 b와 c점에서 갈라진다. $\gamma_0' < \gamma_0$, $\gamma_0'' > \gamma_0$ 이다.

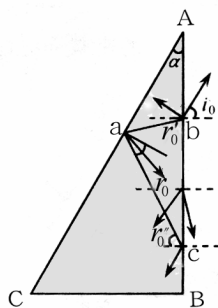



그림 2-20-2

이것은 빛선 ab가 유리와 공기의 경계면에서 전반사되지 않는다는것을 의미한다. 이때 빛선 ac는 전반사된다. 빛선이 b점에서 프리즘으로부터 나올 때 빛선의 굴절각 i_0 은 아래관계식으로부터 얻을수 있다.

$$\frac{\sin\gamma_0'}{\sin i_0} = \frac{1}{n}, \quad \frac{\sin(\gamma_0 - \alpha)}{\sin i_0} = \frac{1}{n}$$

이로부터

$$n = \sqrt{\left(\frac{\sin\gamma_0}{\sin i_0} - \cot\alpha\right) + 1}$$

각 i_0 은 프리즘에서 나오는 모든 빛선에서 프리즘의 집초면의

임의의 점에 집중된다. 프리즘의 중심에서부터 이 점으로 향한 방향과 빛축과 이루는 i_0 은 D점의 아래쪽에 도달하지 못한다. 프리즘에서 나온 빛선과 빛축우에로 향한 경사각이 i_0 보다 클수 없다. 밝은 부분은 D점의 아래쪽에 있으므로 빛선과 아래쪽과의 경사각은 0°에서 90°사이의 각이다. 이런 상태에서 $\alpha = 30^\circ$, $i_0 = 30^\circ$ 이므로

$$n = \sqrt{(1-\sqrt{3})^2 + 1} \approx 1.24$$

4. 보아의 량자가정으로부터 원자가 복사하는 빛량자의 주파수는

$$v = \frac{1}{h}(E_{n+1} - E_n)$$

수소원자는 오직 한개의 전자가 핵주위를 운동하기때문에 꿀롱힘이 곧 향심력으로 된다. 즉

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

이때 전자의 운동에네르기는

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$$

전자가 원자핵주위를 운동할 때 핵의 작용을 받는 자리에네르기는

$$E_p = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r}$$

원자의 전체 에네르기는

$$E = E_k + E_p = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$$

보아의 량자가정으로부터 수소원자의 자리길반경은

$$r_n = \frac{\varepsilon_0 n^2 h^2}{\pi m e^2}$$

전자가 n번째 자리길에서 가지는 에네르기는

$$E_n = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2 n^2}$$

따라서 빛량자의 주파수는

$$v=\frac{1}{h}(E_{n+1}-E_n)=\frac{1}{h}\left(\frac{me^4}{8\varepsilon_0{}^2h^2}\right)\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2h^3}\cdot\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

$n\gg1$일 때

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}\approx\frac{2}{n^3}$$

따라서 빛량자의 주파수는

$$v=\frac{me^4}{8\varepsilon_0h^3n^3}$$

만일 고전적인 전자기리론에 따르는 전자의 운동을 고려하면 n번째 자리길에서 회전주파수는

$$v=\frac{v}{2\pi r_n}=\frac{mvr_n}{2\pi mr_n{}^2}=\frac{nh}{4\pi^2mr_n}$$

수소원자의 자리길반경공식을 이 식에 넣으면

$$v=\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2h^3n^3}$$

이다. 즉 두가지 방법으로 얻어지는 결과는 같다. 이것은 n가 매우 큰 자리길우에서 성립하며 따라서 전자가 자리길부근에서 이행하는 결과를 고전리론으로 설명해도 된다는것을 말해준다.

5. 문제의 의미로부터

$$\Delta l=\lambda=\frac{h}{p}$$

불확정성관계에 의해

$$\Delta P=\frac{h}{\Delta l}=\frac{h}{h/P}=P$$

$P=mv$이므로 상대성리론을 고려하지 않으면 m은 상수로 된다. 즉 $\Delta P=\Delta(mv)=m\Delta v$ 이다. 그러므로 전자의 속도는 불확정성관계에 의해 $\Delta v=v$

즉 전자의 본래의 속도는 같다.

6. 립자의 속도 v와 진공속에서의 빛속도 c의 비값이 β라면

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - m_0 c^2 = n m_0 c^2 \quad \to \quad \sqrt{1-\beta^2} = \frac{1}{n+1}$$

$$\therefore \ \beta = \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1}, \quad v = \frac{\sqrt{n(n+2)c}}{n+1}$$

립자의 전체 에네르기는 $E = E_0 + E_k = (n+1)E_0$

$$E^2 = P^2c^2 + E_0^2$$
$$P^2c^2 = E^2 - {E_0}^2 = n(n+2){E_0}^2$$

이 립자의 운동량은

$$P = \frac{1}{c}\sqrt{n(n+2)}\, E_0$$

7. 땅겉면을 평면으로 보면 무선전자기파는 땅면에서 반사될 때 에네르기손실이 없다. 그러므로 그림 2-20-3 에서 보여준바와 같이 위성의 웃쪽과 아래쪽 립체각 Ω 안의 무선전파는 대기층을 뚫고 나올수 있다. Ω 의 크기는 전반사림계각 α_0 에 의하여 결정된다. 그림에 의해 200km 높은 곳의 굴절률은 0.5, 300km 떨어진 곳에서의 굴절률의 극소값은 0.3이다. 그러므로

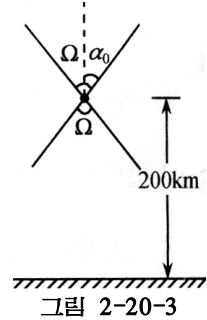
그림 2-20-3

$$\sin\alpha_0 = \frac{0.3}{0.5} = \frac{3}{5}, \quad \cos\alpha_0 = \frac{4}{5}$$

문제에서 주어진 공식 $\Omega = 2\pi(1-\cos\alpha_0)$ 에 넣으면 무선전자기파의 출력은

$$P = \frac{P}{4\pi}\cdot 2\Omega = \frac{P_0}{4\pi}\cdot 4\pi\left(1-\frac{4}{5}\right) = 0.2P_0$$

$$\frac{P}{P_0} = 0.2$$

8. 초점의 성질을 리용하여 PQ의 영상 P′Q′를 그릴수 있다.(그림 2-20-4의 ㄱ를 보아라)

1) y와 y'를 리용하여 물체와 영상의 크기를 표시하면 기하학적관계로부터

$$\frac{y}{y'}=\frac{a-f_1}{f_1}=\frac{f_2}{b-f_2}$$

정리하면 다음의 관계식을 얻는다.

$$\frac{f_1}{a}=\frac{f_2}{b}=1$$

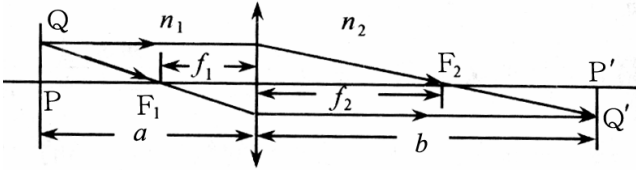
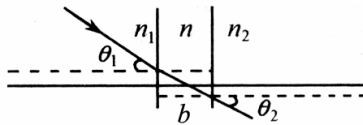
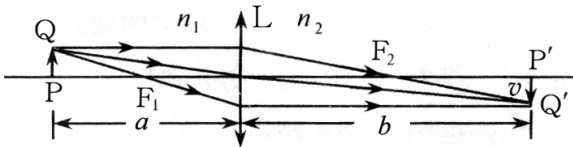



그림 2-20-4

2) 얇은 렌즈중심부근은 거시적으로 얇은 평면이다. 입사빛선은 2번 굴절된 후 나온다. 확대된 후의 경로는 그림 2-20-4의 ㄴ와 같다. 그림에서 θ_1는 입사각, θ_2은 그에 대응하여 나오는 각이다.

γ는 렌즈중심부근에서 빛선과 법선사이의 좁은 각이다. 렌즈의 굴절률이 n이라고 하면 굴절법칙에 의해

$$n_1\sin\theta_1=n\sin\gamma=n_2\sin\theta_2$$

이다. 평행빛선에 대해서는 θ_1, $\theta_2\to 0$이므로

$$\sin\theta_1\approx\theta_1,\quad \sin\theta_2\approx\theta_2$$

이다. 이로부터

$$\theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\theta_1$$

3) Q점에서 중심 O로 입사하는 입사빛선은 렌즈 L에서 굴절된 후 Q′로 나간다. 그림 2-20-4의 ㄷ에서 보여준바와 같이

$$\frac{y}{a} = \tan\theta_1 \approx \theta_1, \quad \frac{y'}{b} = \tan\theta_2 \approx \theta_2$$

두 식을 서로 나눈 결과 $\frac{y'a}{yb} = \frac{n_1}{n_2}$ 에 $\frac{y}{y'} = \frac{a-f_1}{f_1}$ 임을 리용하면

$$f_1 = \frac{n_1 ab}{n_2 a + n_1 b}$$

를 얻는다. 또한 $\frac{y}{y'} = \frac{f_2}{b-f_2}$ 임을 리용하면

$$f_2 = \frac{n_1 ab}{n_2 a + n_1 b}$$

를 얻는다. 이로부터 f_1, f_2, n_1, n_2 사이의 관계식은

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{n_2}{n_1}$$

9. 탐측기가 $n$mol의 우라니움 ^{238}U 을 가지고있다고 하자. 반감기로부터

$$\tau = \frac{0.693}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{0.693}{\tau}$$

식에서 λ 는 반감기상수, 반감기 $\tau = 4.5\times10^9\times365\times24$h 이다. 그리하여 1h동안에 감쇠되는 원자핵의 수는 $\lambda N_0 = \lambda n\times6.025\times10^{23}$ 개이다. 점방사원이 사방으로 복사하므로 22cm^{2}의 수감부걸면이 받아들이는 전체 복사량은

$$\frac{22}{4\pi\times1.5^2\times10^4}$$

이로부터

$$\frac{0.693}{4.5\times10^9\times365\times24}\times n\times6.025\times10^{23}\times$$
$$\times0.07\times0.007\times\frac{22}{4\pi\times1.5^2\times10^4}\times\frac{1}{400} = 125$$

$$n=123.8\text{mol}$$

그리하여 $M=123.8\times0.238\approx30(\text{kg})$

10. 1) 볼록렌즈 L_1에 의해 영상 $A'B'$가 생긴다. L_1의 중심에서 물체 AB까지의 거리 a_1, L_1의 중심에서 영상 $A'B'$까지의 거리 b_1와 초점거리 f_1사이의 관계식은

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_1}=\frac{1}{f_1}$$

$a_1=20\text{cm}$, $f_1=10\text{cm}$ 로부터 $b_1=20\text{cm}$ 이다. 영상 A'B'의 직경

$$d'=2\frac{b_1}{a_1}=2\text{cm}$$

볼록렌즈 L_2에 의해 영상 $A'B'$는 가림판 P에 영상 $A''B''$를 만든다. L_2의 중심에서 $A'B'$까지의 거리 a_2, L_2의 중심에서 $A''B''$까지의 거리 b_2과 초점거리 f_2사이의 관계식은

$$\frac{1}{a_2}+\frac{1}{b_2}=\frac{1}{f_2}$$

$a_2=l-b_1=10\text{cm}$, $f_2=5\text{cm}$ 로부터 $b_2=10\text{cm}$ 이다.

따라서 L_2과 가림판사이의 거리는 10cm이다.(그림 2-20-5의 ㄱ이다.)

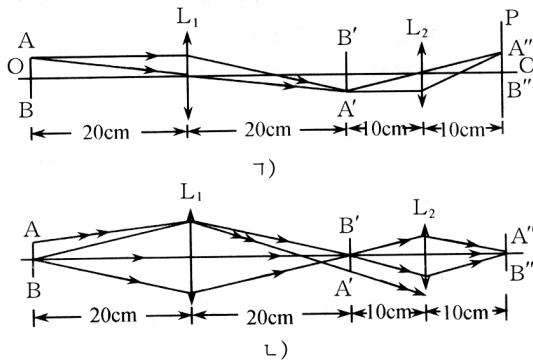



그림 2-20-5

2) 원래 광학계의 물체와 영상사이관계는 그림 ㄱ이다. 만일 1

개의 볼록렌즈를 더 끼워놓되 A″B″의 위치와 크기가 모두 변하지 않게 하려면 중간영상 A′B′위치에 L_3을 놓아야 한다. 이렇게 해야 렌즈 L_3에 대하여 물체까지의 거리도 령, 영상까지의 거리도 령으로 되므로 빛이 L_3을 통과해도 A′B′의 위치와 크기가 변하지 않게 된다. 영상의 밝기정도는 가림판의 영상점에 도달하는 빛량에 의해 결정된다. 작도법으로 알수 있는바와 같이 원판중심에서 나와 L_1를 지나는 빛선은 모두 L_2에 들어가며 발광판의 테두리에서 나온 빛선은 L_1를 통과하여 일부만이 L_2에 들어간다.(그림 2-20-5의 ㄴ이다.) A″B″의 테두리부분은 중심부분보다 어둡다. L_3의 테두리부분의 빛들이 이 L_3을 통과한 다음에는 주축방향쪽으로 편기되므로 렌즈 L_2로 들어가게 한다. 따라서 L_3은 영상의 여러 부분에서 밝고 어두운 차이를 작게 하는 역할을 수행하게 된다. 만일 L_1와 L_2이 L_3에 대해 상대적으로 대칭인 위치에 놓여있다면 모양 L_1이 L_2을 통과한 후 생기는 영상의 크기는 L_3의 직경과 같아지게 된다. 즉 L_2은 L_1의 영상이다. L_1에서 나온 모든 빛선은 L_2의 대응하는 위치에 도달하므로 전부 L_2을 지나 똑같은 밝기의 영상 A″B″를 만든다. 따라서 L_3의 초점거리는

$$\frac{1}{a_3}+\frac{1}{b_3}=\frac{1}{f_3}$$

$a_3=b_1=20\text{cm}$, $a_3=a_2=10\text{cm}$ 이므로

$$f_3=\frac{a_3b_3}{a_3+b_3}=\frac{20}{3}\text{cm}$$

L_1의 영상의 직경은

$$4\frac{b_3}{a_3}=2\text{cm}$$

이므로 L_2의 직경과 꼭같다.

올림픽경연모의문제 Ⅰ

1. 실험결과는 장치설계를 구상한 학생이 옳고 그의 상대자인 다른 학생의 주장이 틀린다는것을 증명해준다.

   1) 대기압을 P_0, 물의 밀도를 ρ 하고 하자. 변 K를 열기 전 상태를 다음 그림의 ㄱ에 보여주었다.

   용기 B와 C속에 있는 기체의 압력을 각각 P_B, P_C 로 표시하면 류체정력학적견지에서 볼 때

$$P_B = P_C = P_0 + \rho g(h_1 + h_2)$$

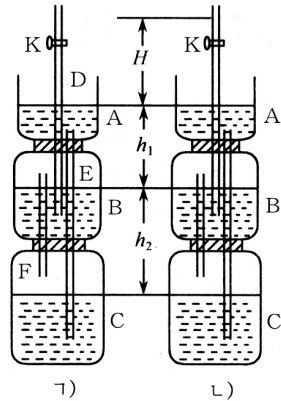
   이면 관 D속에 있는 기체의 압력 P_D 는

$$P_D = P_B - \rho g h_1$$

   로 되여야 한다는것을 쉽게 알수 있다.

   우의 두 식으로부터 $P_D = P_0 - \rho g h_2$ 로 되므로 $P_D > P_0$ 으로 된다.

   이제 변 K를 열면 관 D속에 있는 기체의 압력이 P_0까지 낮아질것이며 이때는 $P_D - P_0 = \rho g h_1$ 이므로 관 D속에 있는 물기둥에서 용기 B속의 물면보다 우에 있는 부분이 우로 향하는 힘을 받게 되며 따라서 관 D속의 물기둥이 우로 올라가게 된다.

   2) 변 K를 열면 물기둥이 올라가게 되지만 관 D의 길이가 충분히 긴 경우에는 관끝까지 올라가지 못한다. 이제 관 D속에서 물기둥이 올라가다가 정지되였을 때 관속에서 물의 증가량(체적)을 ΔV 라고 하자. 그러면 용기 B속의 물면이 낮아지게 된다. 때문에 용기 B와 C속에 있는 기체의 압력도 낮아진다. 그러면 용기 C로 흐르게 되며 물의 이동량이 ΔV 로 될 때 용기 B, C속에 있는 기체의 압력이 원래의 값으로 되돌아가게 된다. 한편 용기 A, B, C의 반경이 관 D의 반경의 60배이므로 자름면적은 3 600배로 된다. 때문에

용기 A, B, C에서 적은 량의 물($\pm\Delta V$)의 증가와 감소에 의한 물면의 변화는 무시할수 있으며 따라서 h_1, h_2은 일정한 값으로 보아도 충분하다. 이제 관 D속의 물기둥이 용기 A의 물면으로부터 H 높이까지 올라가 정지되였다고 하자.(그림의 ㄴ) 그러면

$$P_0 + \rho g(h_1 + h_2) = P_0 + \rho g(H + h_1)$$

따라서 $H = h_2$

3) 그림의 ㄱ와 ㄴ를 비교하여보면 두 그림에서의 차이가 다음과 같음을 알수 있다. 즉 용기 A로부터 ΔV 만 한 물이 용기 C로 이동하였고 용기 B로부터 관 D로 역시 ΔV 만 한 물이 이동하였다. 이때 A로부터 C로의 이동에 의해서는 중력포텐샬이 감소되며 B로부터 D로의 이동에 의해서는 중력포텐샬이 증가한다. 중력포텐샬의 감소량은

$$\Delta E_1 = \rho g \Delta V(h_1 + h_2)$$

이다. 그리고 관 D속에서 올라간 물기둥의 중력중심은 용기 A의 물면으로부터 $\frac{H}{2} = \frac{h_2}{2}$ 만큼 우에 놓이므로 중력포텐샬의 증가량은

$$\Delta E_2 = \rho g \Delta V\left(h_1 + \frac{h_2}{2}\right)$$

결국 $\Delta E_1 > \Delta E_2$

이로부터 알수 있는것처럼 ΔV 만 한 물이 용기 A로부터 C로 이동할 때 중력포텐샬의 감소량의 일부분은 같은 체적의 물이 용기 B로부터 관 D로 올라가는데 요구되는 중력포텐샬의 증가로 넘어가고 그 나머지부분은 물기둥의 운동에네르기로 넘어간다. 그러므로 관 D속의 물기둥은 아래우로 진동하다가 나중에 평형위치에서 물면이 정지되게 된다. 그 원인은 물과 관사이의 마찰이다. 기타 요인에 의해 이 운동에네르기가 점차 소모되여버리므로 최종적으로는 용기 A의 물면으로부터 $H=h_2$만 한 높이에서 물기둥의 물면이 멎어버리게 되는것이다.

2. 옆의 그림에 보여준바와 같이 질점이 경사면우에서 미끄러질 때 받게 되는 마찰력 f 는 $f=\mu mg\cos\theta$ 이다.

이 질점이 경사면 맨 밑에 이르러 첫번째로 충돌할 때의 속도를 v_1 라고 하면

$$\frac{1}{2}mv_1^2=mgL\sin\theta+\mu mgL\cos\theta$$

첫번째로 충돌한후 질점은 경사면을 따라 우로 v_1 의 속도로 올라간다. 이때 최대로 올라간 경사면의 길이를 L_1 이라고 하면

$$\frac{1}{2}mv_1^2=mgL_1\sin\theta+\mu mgL_1\cos\theta$$

우의 두 식으로부터

$$mgL\sin\theta-\mu mgL\cos\theta=mgL_1\sin\theta-\mu mgL_1\cos\theta$$

이로부터

$$\frac{L_1}{L}=\frac{\sin\theta-\mu\cos\theta}{\sin\theta+\mu\cos\theta}$$

이다. 이제 우의 식의 오른변을 α 로 표시하고 $\theta=45^\circ$, $\mu=0.2$ 를 넣어 계산하면

$$L_1=\alpha L,\quad \alpha=\frac{1-0.2}{1+0.2}=\frac{2}{3}$$

꼭같은 리치로 두번째 충돌후 경사면을 따라 올라간 거리 L_2은 $L_2=\alpha L_1=\alpha^2L$, 열번째 충돌후 올라간 거리 L_{10}은 $L_{10}=\alpha^{10}L$ 첫번째 충돌할 때까지 질점이 운동한 거리는

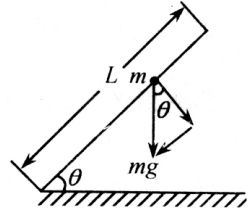
$$S_1=L$$

두번째 충돌할 때까지 질점이 운동한 전체 거리는

$$S_2=L+2L_1=L+2\alpha L$$

이다. 같은 리치로 11번째 충돌할 때까지 질점이 운동한 전체 거리는

$$S_{10}=L+2\alpha L+2\alpha^2L+\cdots+2\alpha^{10}L$$

3. 기통이 수평상태에 있을 때 수증기의 체적을 V_1, 질소의 체적을 V_2 , 수직상태에 있을 때 수증기의 체적을 $V_1-\Delta V$, 수증기

의 압력은 역시 P_0, 질소의 체적을 $V_2+\Delta V$ 라고 하자. 이때 질소기체의 압력은 $P=P_0-\dfrac{Mg}{S}$ 로 된다. 한편

$$P_0V_2=\frac{m}{\mu_2}RT_0,\quad P(V_2+\Delta V)=\frac{m}{\mu_2}RT_0$$

이므로

$$\Delta V=\frac{MgV_2}{P_0S-Mg}$$

포화수증기로부터 생긴 물의 질량을 Δm 이라고 하자. 문제조건에서 극히 일부의 기체가 물로 되였다고 했으므로 이 물의 체적은 남아있는 수증기의 체적에 비해 매우 작으므로 무시할수 있다.

$$\Delta m=\frac{\mu_1P_0\Delta V}{RT_0}$$

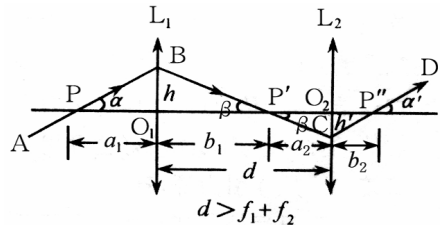
우의 식들로부터

$$\Delta m=\frac{\mu_1}{\mu_2}\cdot\frac{mM\,g}{P_0S-M\,g}$$

결국 기통 I 부분으로부터 외부로 방출된 열량 Q는

$$Q=L\cdot\Delta m=\frac{\mu_1}{\mu_2}\cdot\frac{mM\,gL}{P_0S-M\,g}$$

4. 1) 아래그림에서 보여준것처럼 입사빛선 AB는 렌즈 L_1을 통과한후 굴절되여 BC선을 따라 렌즈 L_2로 향하게 된다.

이 빛선은 렌즈 L_2을 통과하면서 굴절되여 CD 선을 따라 나오게 된다. 선 AB, BC, CD들과 주빛축의 교차점들을 각각 P, P′로 표시하자. 이제 P점에 점광원이 놓여있다고 하자. 이때 P로부터 주빛축을 따라 전파되는 빛선은 직선방향으로 곧추 나가므로 렌즈 L_1을 통과한 다음 P점의 영상은 P′에 생기게 된다. 그리고 렌즈 L_2을 통과한 다음 P점의 영상은 P″에 생긴다. 따라서 그림에

표시하여준 a_1, b_1, a_2, b_2 사이에는 다음과 같은 관계가 만족되여야 한다.

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_1}=\frac{1}{f_1}, \quad \frac{1}{a_2}+\frac{1}{b_2}=\frac{1}{f_2}$$

$$d=a_2+b_1$$

한편 입사빛선 AB와 굴절빛선 CD가 평행이라는 조건하에서는 그림에 표시해준 각 α와 α'가 같아야 한다. 즉

$$\alpha=\alpha'$$

3각형의 다음 조건을 리용하면

$$\frac{h'}{h}=\frac{b_2}{a_1}, \quad \frac{h'}{h}=\frac{a_2}{b_1} \quad \rightarrow \quad \frac{b_2}{a_1}=\frac{a_2}{b_1}$$

우의 식들을 련립하고 b_1, a_2, b_2을 없애면

$$a_1=\frac{f_1 d}{d-(f_1+f_2)}$$

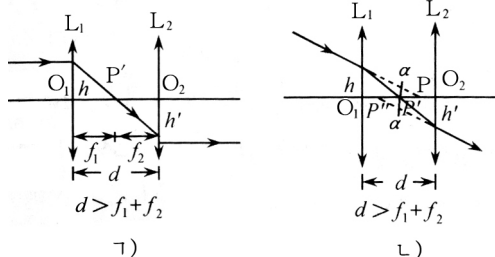
여기서 d, f_1, f_2은 이미 결정되여있는 량들이므로 a_1는 한가지 값으로만 주어진다. 이것은 입사빛선과 렌즈계를 통과하여나오는 굴절빛선이 평행되려면 입사빛선이 렌즈의 주빛축우의 확정된 한 점을 통하여 입사되여야 한다는것을 의미하는데 이 점은 렌즈 L_1의 왼쪽으로 거리 a_1인 위치에 놓여있다. 그리고 a_1는 각 α와 무관계하므로 결국 이 점을 통과하여 렌즈 L_1로 입사되는 모든 빛선들은 대응하는 굴절빛선들과 평행으로 된다.

2) 우의 결론으로부터 알수 있는것처럼 $d>f_1+f_2$일 때 $a_1>0$으로 된다. 이러한 경우의 빛행로가 바로 앞에서 준 그림이다.

$d=f_1+f_2$인 경우에는 $a_1\rightarrow\infty$, $\alpha=0$으로 되며 이때는 입사빛선과 굴절빛선이 모두 주빛축에 평행으로 된다.(그림 ㄱ)

결국 $d>f_1+f_2$이므로 $a_1<0$으로 되는 때는 P점이 렌즈 L_1의 오른쪽에 있게 되며 이것은 렌즈 L_1에 대해서는 허영상으로 된다는것을 의미한다. 이 경우에 $b_1>0$이며 $a_2=\frac{f_2}{f_1}b_1$이므로 $a_2>0$으로 된다. 또한

$$\frac{a_2}{b_2}=\frac{b_1}{a_1}<0$$

이므로 $b_2<0$ 으로 된다. 이 경우의 빛행로를 그림 ㄴ에 보여주었다.

5. O_5점의 전위는

$$\varphi_{(O_5)}=k(\frac{q}{R}+\frac{q}{R/2}+\frac{q}{R/4}+\frac{q}{R/8}+\frac{q}{R/16})=$$

$$=k(1+2+2^2+2^3+2^4)\frac{q}{R}=31k\cdot\frac{q}{R}$$

O_1점의 전위는

$$\varphi_{(O_1)}=k(\frac{q}{R}+\frac{q}{R/2}+\frac{q}{R/2+R/4}+\frac{q}{R/2+R/4+R/8}+$$

$$+\frac{q}{R/2+R/4+R/8+R/16})=k\left(3+\frac{372}{105}\right)\frac{q}{R}=6.54k\frac{q}{R}$$

따라서 O_5점과 O_1점사이의 전위차는

$$\varphi_{(O_5)}-\varphi_{(O_1)}=3k\frac{q}{R}-6.54k\frac{q}{R}=24.46k\frac{q}{R}$$

6. 우선 일정한 질량을 가지는 끌힘원천(천체)이 검은구멍으로 될수 있다는데 대하여 고찰해보자. 검은구멍의 정의에 의하여면 빛속도로 운동하는 빛량자까지도 검은구멍의 끌힘을 극복할수 없으므로 검은구멍의 겉면으로부터 《탈출》할수 없다. 그리고 검은구멍에 대한 라플라스의 고전모형에서는 빛속도 c로 운동하는 물질립자로 보고있다. 우리가 이미 알고있는바와 같이 끌힘이 작용할 때 물체의 포텐샬에네르기는 부(-)이다. 물체가 이 끌힘을 완전히 극복한다는것은 최소현 물체가 끌힘원천으로부터 무한히 먼곳까지 운동하는 과정에 그 물체가 가지고있던 운동에네르기가 바로 이 끌힘을 극복하면서 수행하는 일에 전

부 소모되여버린다는것을 의미한다. 이 경우에 물체가 무한히 먼곳까지 이르면 그의 운동에네르기와 포텐샬에네르기는 모두 령으로 되여야 한다. 이것은 곧 물체가 끌힘원천의 겉면에 있을 때 운동에네르기와 포텐샬에네르기의 합이 령으로 된다는것을 의미한다. 물체가 끌힘의 작용을 극복할수 없다는것은 이 물체가 끌힘원천으로부터 무한히 먼곳에 아직 도달하지 못한 위치에서 그의 운동에네르기가 끌힘을 극복하는데 다 소비되여 버렸다는것인데 그러나 이때 물체의 포텐샬에네르기값은 아직 부(−)값으로 남아있다. 이것은 물체가 끌힘원천의 겉면에 있었을 때 그의 운동에네르기와 포텐샬에네르기의 합이 령보다 작아야 한다는것을 의미한다. 끌힘원천의 질량이 M, 그의 반경이 r_{B}이고 질량이 m, 처음속도가 빛속도 c인 물체가 이 끌힘원천의 겉면에 있는데 이 끌힘작용을 극복할수 없다면 결국 뉴톤력학의 견지에서 볼 때 다음과 같은 조건이 만족되여야 한다.

$$\frac{1}{2}mc^2 - G\frac{M \cdot m}{r_{\mathrm{B}}} < 0 \quad \text{혹은} \quad r_{\mathrm{B}} < \frac{2GM}{c^2}$$

이것은 질량이 M인 끌힘원천의 반경 r_{B}가 $\dfrac{2GM}{c^2}$보다 작아질 때에라야만 (이 r_{B}를 검은 구멍의 끌힘반경이라고 부른다.) 그 겉면에서 빛량자도《탈출할수 없을 정도》의 강한 끌힘이 생기게 된다는것, 따라서 그 어떤 광학적측정방법으로도 이러한 천체를 직접 관찰할수 없다는것을 말해준다. 이런 원인으로 하여 이러한 천체를《검은구멍》이라고 부르게 되였다. 그러면 문제에서 제시된 관측값들을 리용하여 은하계의 중심에 존재하는 검은구멍의 반경을 구하여보자. 끌힘원천의 질량을 M, 그를 돌고있는 항성의 질량을 m이라고 하면 이 항성이 원운동할 때

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2}, \quad M = \frac{r v^2}{G}$$

로 되여야 한다. 여기서 r는 원운동궤도의 반경이다. 한편 이 끌힘원천이 검은구멍으로 되자면 그 질량의 분포반경이

$$r_{\mathrm{B}} < \frac{2G}{c^2} \cdot \frac{r v^2}{G}$$

으로 되여야 한다. 주어진 수값들을 넣으면

$$r_B < 5.3\times10^8\,\mathrm{m} = 5.3\times10^5\,\mathrm{km}$$

결국 질량이

$$M = \frac{rv^2}{G}$$

인 끌힘원천인 경우에 그의 반경이 5.3×10^5km보다 작아야만 검은구멍으로 되며 이보다 크면 검은구멍으로 될수 없다는것을 의미한다. 따라서 은하계중심부근에 검은구멍이 존재한다면 그의 반경은 5.3×10^5km보다 작아야 한다.

7. 축전기를 충전한 다음 전원을 떼버렸으므로 극판에 쌓인 전기량은 변하지 않는다. 그러므로 두 극판사이의 전압 U는 축전기의 전기용량 C에 거꿀비례한다. 한편 축전기의 전기용량 C는 두 극판사이의 거리 d에 거꿀비례한다. 따라서 $U = Ad$이다. 여기서 A는 비례결수이다. 극판 2에 압력 P를 주면 왼쪽으로 이동하면서 용수철이 변형된다. 이동이 끝난 평형상태에서 극판 2가 이동한 거리를 Δd, 극판사이전압의 감소량을 ΔU라고 하면

$$U - \Delta U = A(d - \Delta d)$$

우의 두 식으로부터

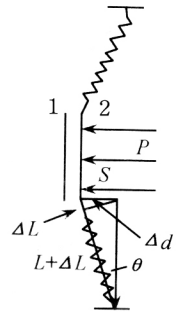
$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{\Delta d}{d}$$

극판 2가 이동된 다음 용수철이 원래의 위치로부터 각 θ만큼 편기되고 늘어난 길이가 ΔL이라고 하자.(그림을 보라.)

이때 용수철의 힘에서 극판에 수직인 성분과 극판 2에 주는 압력에 의한 힘이 서로 비기게 된다. 즉 $PS = 2k\Delta L\sin\theta$

한편 $\sin\theta \approx \dfrac{\Delta d}{L}$이므로

$$P = \frac{2kd^3}{L^2S}\left(\frac{\Delta U}{U}\right)^3$$

8. 1) 고정된 수평회전축 A로부터 기중기걸개까지의 수직거리를 h_1, C점까지의 수직거리를 h_2, 팔 ABD와 수평면사이의 각을 θ, 팔 DEF와 수평면사이의 각을 φ라고 하자.(그림)

A점을 중력포텐샬의 기준점(중력 포텐샬이 0인 위치)으로 잡으면 기중기의 팔들과 걸개(중량물 포함)로 이루어진 계의 중력포텐샬은

$$E_P = -G(l_3 \sin\varphi - l_1 \sin\theta)$$

여기서 G는 걸개(중량물 포함)의 무게이다. 기중기걸개 F가 수직면우에서 이동할 때 각 θ와 φ는 변화된다. 그러므로 E_P값도 변화될수 있다. 그런데 F가 이동할 때 평형기중기가 언제나 평형상태에 있자면 각 θ와 φ가 변해도 이 전체 계의 포텐샬에네르기 E_P가 변하지 말아야 한다. 한편 θ와 φ는 서로 독립적으로 변하는것이 아니라 다음과 같은 기하학적관계를 만족시킨다.

$$l_2 \sin\theta + h_2 = l_4 \sin\varphi$$

우의 두 식에서 φ를 없애면

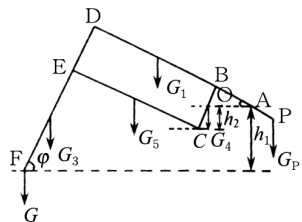
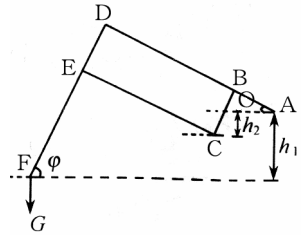
$$E_P = -G\left(\frac{l_2 l_3}{l_4} - l_1\right)\sin\theta - Gh_2\frac{l_3}{l_4}$$

E_P가 θ에 따라 변하지 않으려면 $\sin\theta$가 들어있는 첫 마디가 령으로 되여야 한다. 그런데 $G \neq 0$이므로

$$\frac{l_2 l_3}{l_4} - l_1 = 0, \quad \text{즉} \quad \frac{l_1}{l_2} = \frac{l_3}{l_4}$$

으로 되여야 한다. 이것이 l_1, l_2, l_3, l_4들이 만족해야 할 조건이다.

2) 기중기의 매개 팔들의 중량을 고려하는 경우에도 임의의 중량물 G에 대하여 임의의 위치 (θ, φ)에서 평형기중기전체가 평형상태에 놓이게 되자면 계의 포텐샬에네르기 E_P가 θ, φ에 따라 변하지 말아야 한다.

A점을 역시 포텐샬에네르기의 기준점으로 잡으면 매개 팔(걸개, 중량문, 보조중량물들을 포함하여)들의 포텐샬에네르기는 각각 다음과 같다.(그림)

$$E_{\mathrm{PABD}} = \frac{1}{2} l_1 G_1 \sin\varphi - l_P G_P \sin\theta$$

$$E_{\mathrm{CE}} = -\left(h_2 - \frac{1}{2} l_5 \sin\theta\right) G_5 = \frac{1}{2} l_5 G_5 \sin\theta - G_5 h_2$$

$$E_{\mathrm{DEF}} = -(h_1 - \frac{1}{2} l_3 \sin\theta) G_3 - (l_3 \sin\varphi - l_1 \sin\theta) G =$$

$$= \frac{1}{2} l_3 G_3 \sin\varphi - (l_3 \sin\varphi - l_1 \sin\theta) G - G_3 h_1$$

$$E_{\mathrm{BC}} = -(h_2 - \frac{1}{2} l_4 \sin\theta) G_4 = \frac{1}{2} l_4 G_4 \sin\varphi - G_4 h_2$$

따라서 고찰하는 전체 계의 포텐샬에네르기는

$$E_P = -\left(\frac{1}{2} l_1 G_1 - l_P G_P + \frac{1}{2} l_5 G_5 + G l_4\right) \sin\theta + \left(\frac{1}{2} l_3 G_3 + \frac{1}{2} l_4 G_4 - G l_3\right)$$
$$\times \sin\varphi - G_5 h_2 - G_3 h_1 - G_4 h_2$$

우의 식을 $l_2 \sin\theta + h_2 = l_4 \sin\varphi$ 와 련립하고 φ 를 없애면

$$E_P = -\left[\frac{1}{2} l_1 G_1 - l_P G_P + \frac{1}{2} l_5 G_5 + \frac{1}{2} l_3 G_3 \frac{l_2}{l_4} + \frac{1}{2} l_2 G_4 - G\left(\frac{l_2 l_3}{l_4} - l_1\right)\right] \times$$
$$\times \sin\theta - G h_2 \frac{l_3}{l_4} - \frac{1}{2} l_3 G_3 \frac{l_2}{l_4} - \frac{1}{2} G_4 h_2 - G_5 h_2 - G_3 h_1 - G_4 h_1$$

E_P 가 θ 에 무관계하자면 $\sin\theta$ 마디의 결수가 령으로 되여야 하며 문제조건에 의해 $\frac{l_2 l_3}{l_4} - l_1 = 0$ 이고 $l_5 = l_1 - l_2$ 임을 고려하면

$$G_P = \frac{1}{2 l_P} [l_1 G_1 + (l_1 - l_2) G_5 + l_3 G_3 + l_2 G_4]$$

올림픽경연모의문제 II

1. 1) 땅겉면부근에서 황사먼지가 공기중에 그대로 떠있자면 공기에 의한 저항이 중력과 같아야 한다. 즉 $\alpha\rho A v_1^2 = mg$

여기서 m 은 먼지알갱이의 질량이다. 한편 $A=\pi r^2$, $m=\rho_S \frac{4}{3}\pi r^3$ 이므로

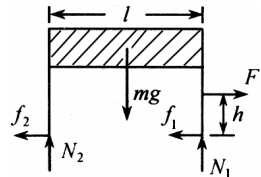
$$v_1 = \sqrt{\frac{4}{3}\frac{\rho_S g r}{\alpha\rho_0}} = 4(\mathrm{m/s})$$

2) $v=9\mathrm{m/s}$ 일 때 황사먼지가 가장 높이 올라간 곳의 공기밀도를 ρ_h, 그 높이를 h 로 표시하자. 그러면 $\rho_h=\rho_0(1-ch)$
그리고 먼지가 내려오지 않고 그냥 떠있으므로

$$\alpha\rho A v_1^2 = mg$$

$$\therefore\ h=\frac{1}{c}\left(1-\frac{4r\rho g}{3\alpha v^2\rho_0}\right)=6.8\times 10^3(\mathrm{m})$$

2. 짐과 썰매들에서 받는 힘들은 다음과 같다.(그림)

여기서 N_1과 N_2은 눈판이 썰매들에 주는 맞선힘들이며 f_1, f_2는 각각 마찰력들이다. 평형조건은

$$F=f_1+f_2,\quad mg=N_1+N_2,\quad Fh+N_2 l=\frac{1}{2}mgl$$

이다. 한편 마찰력들은 각각 $f_1=\mu_1 N_1$, $f_2=\mu_2 N_2$ 이다. 이 식들을 련립하여 풀면

$$N_2=\frac{\frac{1}{2}l-\mu_1 h}{l-(\mu_1-\mu_2)h}mg$$

$$F=\frac{1}{2}\cdot\frac{l(\mu_1+\mu_2)}{l-(\mu_1-\mu_2)h}mg$$

한편 문제의 조건에 의하여 $F>0$, $N\geq 0$ 으로 되여야 하는데

이 조건이 만족되자면

$$l-(\mu_1-\mu_2)h>0,\quad \frac{1}{2}l-\mu_1 h\geq 0$$

으로 되여야 한다. 따라서 $h\leq\dfrac{l}{2\mu_1}$ 로 되여야 하며 이런 조건 하에서

$$F=\frac{1}{2}\cdot\frac{l(\mu_1+\mu_2)}{l-(\mu_1-\mu_2)h}mg$$

로 되여야 한다.

3. 용기들의 자름면적을 S, 왼쪽 용기에 넣은 기체의 물질량을 n, 변을 열기 전 기체의 압력을 P_0 이라고 하면 리상기체상태방정식으로부터

$$P_0SH=nRT_0$$

변을 열면 기체가 관을 통하여 오른쪽 용기로 넘어가면서 피스톤이 서서히 내려오는데 이때 기체가 피스톤에 주는 압력과 피스톤이 기체에 주는 압력은 다같이 P_0 이다. 평형상태에 이른 후 피스톤의 높이를 x, 기체의 온도를 T 라고 하면

$$P_0S(H+x)=nRT$$

한편 열력학 제1법칙에 의하면 피스톤이 기체에 대해 수행한 일과 기체의 내부에네르기의 증가량이 같아야 하므로

$$P_0S(H-x)=\frac{3}{2}nR(T-T_0)$$

이 식들을 련립하면 $x=\dfrac{2}{5}H,\ T=\dfrac{7}{5}T_0$

4. 고리로 전류 I가 흐를 때 고리중심에서의 자기유도는

$$B=\frac{\mu_0 I}{2r}$$

이다. 이때 고리속을 뚫고지나가는 자력선묶음은 대략

$$\Phi=BS=\frac{\mu_0}{2}\pi I r$$

전자기유도법칙에 의하여 시간에 따르는 전류의 변화에 의해 생기는 유도전동력은

$$\mathscr{E} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{\mu_0}{2}\pi r \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

원형고리의 저항은

$$R = \frac{\mathscr{E}}{I} = \frac{\mu_0 \pi r}{2I} \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

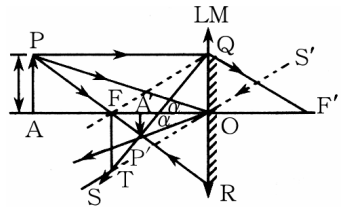
문제의 조건에서

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} \le 10^{-6}(\mathrm{A/365d}) \approx 3\times10^{-14}(\mathrm{A/s})$$

이므로

$$R \le 3\times10^{-23}\Omega$$

5. 1) 물체 AP의 영상 A′P′과 영상작도에 필요한 빛행로들을 그리면 그림과 같다.

평면-볼록렌즈의 평면우에 은을 도금하면 이것은 하나의 볼록렌즈 L과 평면거울 M의 결합체 LM으로 된다.(그림에서 LM으로 표시) 이 그림에서 O는 렌즈의 중심, AOF′는 빛축, F와 F′는 렌즈 L의 두 초점, AP는 물체이다. 영상작도에서는 다음과 같은 세개의 특정한 빛선들을 리용한다.

① P점에서 출발하여 O점으로 입사되는 빛선

이 빛선은 O점을 통과한 후에도 그 방향이 변함이 없이 평면거울 M에 입사된다. 거울 M에서 반사될 때 이 반사빛선과 빛축이 이루는 각은 입사각 α와 같다. 이 반사빛선이 렌즈의 중심 O로 다시 입사되므로 그 방향은 변화됨이 없이 거울 M에서 반사된 방향으로 그대로 직진한다. 이 빛선을 그림에서 OP′로 표시하였다.

② P점에서 출발하여 렌즈 L의 앞초점 F를 지나 렌즈로 입사되는 빛선 PFR

이 빛선은 렌즈에 입사된후 주축에 평행인 방향으로 오른쪽 방향으로 나와서 평면거울 M에 수직으로 입사된다. 거울에서 빛은 역시 빛축에 평행으로 왼쪽 방향으로 반사되여 렌즈 L에 입사된 후 렌즈에 의해 굴절되여

초점 F를 통과하게 된다. 이 빛선을 그림에서는 RFP로 표시하였다.

③ P점에서 출발하여 빛축에 평행으로 렌즈에 입사되는 빛선 PQ

이 빛선은 렌즈 L을 통과한 후 뒤초점 F′를 향하여 오른쪽방향으로 나온다. 이 방향을 그림에서 QF′로 표시하였다. 이 빛선이 평면거울 M에서 반사되여 F′점의 대칭점인 F점을 향하는 방향으로 렌즈 L에 다시 입사된다. 이 입사방향을 그림에서 QF점선으로 표시하였다. 이 빛선은 렌즈 L을 통과하면서 또다시 굴절되는데 이 굴절방향은 다음과 같이 작도할수 있다.

우선 O점을 지나면서 QF에 평행인 보조선 S′OS를 그린다. 이 보조선을 지나는 빛선은 O점을 통과하므로 렌즈를 지나도 그 전파방향이 변하지 않는다. S′OS선과 집초면과의 교차점을 T로 표시하자. 렌즈에 입사되는 평행빛선들은 집초면우의 한 점에서 서로 사귀게 되므로 결국 QF방향으로 렌즈에 입사된 빛선은 굴절되여 T점을 통과하게 된다. 결국 그림에 표시하여준 QT선이 바로 QF방향으로 렌즈에 입사된 후 굴절되여나오는 빛선의 전파방향이다. 결국 우에서 고찰한 세개의 빛선들의 교차점 P′가 P점의 영상이며 A′점은 A점의 영상으로 된다. 그림에서 알수 있는바와 같이 A′P′는 거꾸로 선 실상이다. 우에서 고찰한 세개의 빛선중에서 임의의 두개의 빛선만 고찰하여도 영상 A′P′를 얻을수 있다.

2) 영상의 위치와 크기는 다음과 같이 계산할수 있다.

물체 AP에서 출발한 빛선들이 렌즈 L을 통과하면서 만드는 영상을 제1영상이라고 하자. 이때 물체까지의 거리 $a=2f$ 이므로 제1영상까지의 거리는 $b=2f$ 로 된다. 다시 말하여 제1영상은 평면거울로부터 오른쪽으로 $2f$ 만큼 떨어진 위치에 생길것이며 그의 높이를 H' 라고 하면 $H'=H$ 로 된다. 다음 제 1영상이 반사거울 M에서 반사되면서 만드는 영상을 제2영상이라고 하자. 제1영상은 반사거울 M의 뒤쪽(오른쪽)에 생기므로 거울 M에 대해서는 허영상이

므로 그의 실상은 거울 M의 앞쪽(왼쪽) $2f$ 만 한 거리에 있어야 하며 그의 높이 $H''=H'=H$ 로 된다.

제2영상을 물체로 보고 그것이 다시 렌즈 L을 통과하면서 만드는 영상을 제3영상이라고 하자. 이때 빛선들은 실제상 오른쪽으로부터 렌즈 L에 입사되는데 물체(제2영상)는 렌즈 L의 왼쪽에 있으므로 이것은 허영상으로 보아야 하므로 물체까지의 거리 $a=-2f$ 로 놓아야 한다. 렌즈의 공식

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=-\frac{1}{f}$ 로부터

$$b=\frac{af}{a-f}=\frac{2}{3}f>0$$

즉 제3영상은 렌즈왼쪽의 $\frac{2}{3}f$ 만 한 거리에 있다. 또한 영상의 크기 H''' 는

$$\frac{H'''}{H''}=\left|\frac{b}{a}\right|=\frac{1}{3},\quad H'''=\frac{1}{3}H''=\frac{1}{3}H$$

로 된다.

6. 1) 에네르기보존법칙에 의하면 질량이 m 인 물체가 무한히 먼곳으로부터 만유인력의 작용을 받아 중성자별의 겉면에까지 끌려올 때 내놓게 되는 포텐샬에네르기 ΔE_1 는 처음위치와 마지막위치에서의 만유인력포텐샬에네르기의 차(감소량)와 같아야 한다. 따라서

$$\frac{\Delta E_1}{m}=\frac{0-(-\frac{GMm}{R})}{m}=\frac{GM}{R}\approx 2\times 10^{16}(\mathrm{J\cdot kg^{-1}})$$

의 수소핵의 결합반응에서 원료 1kg당 방출되는 에네르기는 $\frac{\Delta E_2}{m}=0.007\,2c^2$ (c: 빛속도) 따라서 구하자고 하는 두 에네르기의 비는

$$\frac{\Delta E_1}{\Delta E_2}\approx 31$$

2) 문제의 내용으로부터 알수 있는바와 같이 이웃한 두개의 맥동사이의 시간간격은 중성자별의 자전주기와 같다. 중성자

별이 고속으로 회전할 때 적도부근의 요소질량 Δm 이 가지게 되는 원심력은 Δm 에 주는 중성자별의 만유인력보다 클 수 없다. 따라서

$$\Delta m\omega^2 R \le \frac{GM\Delta m}{R^2}$$

여기서 $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$ 는 중성자별의 자전각속도, τ 는 자전주기이다. 이로부터

$$\tau \ge 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{MG}} = 4.4\times10^{-4}\mathrm{s}$$

따라서 시간간격의 아래한계는 4.4×10^{-4}s 이다.

7. 1) 에네르기와 속도사이의 관계 및 문제의 조건으로부터 충돌후 운동하는 전자의 전에네르기는

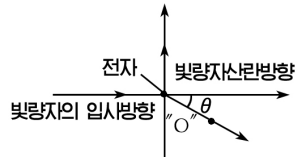
$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} = 1.1m_0c^2$$

이로부터

$$v = \frac{\sqrt{0.2}}{1.1}c = 0.417c \approx 0.42c$$

입사빛량자와 산란빛량자의 운동량은 각각

$$P = \frac{hv}{c}, \quad P' = \frac{hv'}{c}$$

이며 그 방향은 그림에 준것과 같다. 충돌후 운동하는 전자의 운동량은 mv이다.(여기서 m은 운동하는 전자의 상대론적질량이다.) 따라서 운동량보존법칙에 의하여

$$\frac{m_0v}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}\cos\theta = \frac{hv}{c}, \qquad \frac{m_0v}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}\sin\theta = \frac{hv'}{c}$$

문제의 조건에 의하여

$$hv - hv' = 0.1m_0c^2$$

이로부터

$$v = 0.37\frac{m_0c^2}{h}, \quad v' = 0.27\frac{m_0c^2}{h},$$

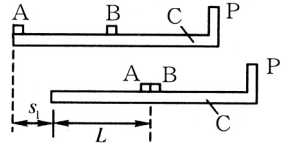
$$\theta = \tan^{-1}\frac{v_1}{v} = \tan^{-1}\frac{27}{37} = 36.1^\circ$$

전자가 원점 O로부터 A점까지 운동하는데 걸리는 시간은

$$\Delta t = \frac{L_0}{v} = 2.4\frac{L_0}{c}$$

2) 관찰자가 S계에 대해 상대적으로 OA방향으로 v의 속도로 운동하는 경우에는(즉 S′계에서 측정할 때) 상대론적길이공식에 의해

$$L = L_0\sqrt{1-(v^2/c^2)} = 0.19L_0$$

8. 1) A, B, P의 질량을 m이라고 하자. A가 v_0의 속도로 운동하기 시작하면 A는 C로부터 μmg만 한 미끄럼마찰력을 받으므로 감속운동하며 C는 A로부터 μmg만 한 미끄럼마찰력과 물체 B가 주는 마찰력 f를 받으므로 가속운동을 하게 된다. 그리고 B도 C에 의한 마찰력 f를 받으므로 가속운동을 하게 된다. 이제 A, B, C의 가속도들을 각각 a_A, a_B, a_C라고 하자. 그러면 뉴톤의 제2법칙에 의하여

$$\mu mg = ma_A, \quad \mu mg - f = ma_C, \quad f = ma_B$$

그런데 이 문제에서는 $a_C = a_B$로서 실제상 C와 B사이의 상대운동이 없다. 왜냐하면 $a_C = a_B$이면 우의 식들로부터 $f = \frac{1}{2}\mu mg$로 되며 이 값이 최대정지마찰력 μmg보다 작으므로 B는 C에 대해 상대적으로 정지되여있는것이다. 먼저 A가 운동하다가 B와 충돌하기 직전의 위치에까지 와서 B에 대해 상대적으로 정지되는 경우를 보자. 그러면 이 순간에 B와 C는 서로 정지되여있고 A도 B와 접촉되는 순간에 그와 속도가 같아지므로 A, B, C의 속도가 모두 같아진다. 이 속도를 v_1라고 하자. 그런데 이 전 계에 작용하는 외부힘의 총합이 령이므로 운동량보존법칙에 의하여

$$mv_0 = 3mv_1$$

이때 A와 B가 접촉(즉 겨우 충돌)하기 직전까지 C가 운동한 거리를 S_1 라고 하면 물체 A가 이동한 거리는 $S_1 + L$ 로 된다.

한편 에네르기보존법칙에 의하여 물체 A가 마찰력 μmg 를 극복하면서 $S_1 + L$ 만 한 거리를 이동하는데 소비된 일은 물체 A의 운동에네르기의 감소량과 같으므로

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \mu mg(S_1 + L)$$

이며 B와 C가 가지게 된 운동에네르기는 B와 C가 S_1 만큼 이동하는 동안 물체 A로부터 받는 힘 μmg 가 수행한 일과 같으므로

$$\frac{1}{2}(2m)v_1^2 = \mu mgS_1$$

로 된다. 우의 두가지 내용을 통합하여 다음과 같이 설명할수도 있다. 즉 물체 A가 운동하기 시작하여 B와 충돌하기 직전까지 전체 계에서의 운동에네르기의 감소량은 그 계내부에서 물체들호상간의 미끄럼마찰력이 수행한 일의 합과 같으므로

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}(3m)v_1^2 = \mu mgL$$

이 식에서 L은 C에 대한 A의 상대운동거리이다. 이로부터

$$v_0 = \sqrt{3\mu gL}$$

결국 물체 A의 처음속도가 $v_0 = \sqrt{3\mu gL}$ 이면 A가 B의 옆에까지 와서 B에 대해 상대적으로 멎게 되며 $v_0 > \sqrt{3\mu gL}$ 이여야 A와 B사이에 튐성충돌이 일어나게 된다. 따라서 A와 B가 튐성충돌할 조건은 $v_0 > \sqrt{3\mu gL}$ 이다.

2) 물체 A의 처음속도가 $v_0 > \sqrt{3\mu gL}$ 을 만족할 때야 A와 B가 튐성충돌할수 있다. A와 B가 튐성충돌하는 순간에 A, B, C의 속도를 각각 v_A, v_B, v_C 라고 하면 $v_A > v_B = v_C$ 로 될것이다. A와 B가 충돌하는 매우 짧은 시간 Δt 동안 나무

판 C가 A와 B에 주는 마찰력의 영향 $f_{마}\Delta t$ (즉 힘덩이를 의미한다.)는 무시할수 있다. 그러면 A와 B로 구성된 력학적계의 운동량이 보존되며 C의 속도는 Δt 시간사이에 변하지 말아야 한다. A와 B사이의 충돌이 튐성충돌이고 계의 력학적에네르기가 보존될뿐아니라 두 물체의 질량이 같기 때문에 운동량보존법칙과 력학적에네르기보존법칙으로부터 충돌전과 충돌후에 두 물체사이의 속도가 서로 바뀐다는것을 증명할수 있다.(증명은 략한다.) 따라서 충돌이 끝나는 순간에 A, B, C의 속도를 각각 v'_{A}, v'_{B}, v'_{C} 라고 하면 $v'_{A}=v_{B}$, $v'_{B}=v_{A}$, $v'_{C}=v_{C}$ 로 된다. 우의 식들을 보면 다음과 같은 결론이 나온다. A와 B가 튐성충돌한 후에는 A와 C의 속도가 같아지므로 A가 C에 대해 상대적으로 정지되며 그 대신 C에 대해 정지되여있던 B가 A가 가지고있던 속도로 C우에서 오른쪽으로 운동한다. 그 다음부터 B의 운동과정에 대한 고찰은 문제 1)에서와 꼭 같아진다. 먼저 B가 제지판 P의 바로 앞에까지 왔을 때 B와 C의 속도가 같아지는 경우를 보자. 이 순간에는 앞에서와 꼭같이A, B, C의 속도가 모두 같아지게 되는데 이 속도를 v_2 이라고 하자. 그러면 운동량보존법칙에 의하여 $mv_0=3mv_2$ 로 된다. 물체 A가 처음속도 v_0 으로 출발하여 B와 튐성충돌한 후 A는 C에 대해 정지되고 그 다음 B가 P에까지 도달하는 전체 과정에 A가 C에 대해 운동한 거리가 L, 그다음 B가 C에 대해 운동한 거리가 L이며 이 과정에 전체 계의 운동에네르기의 변화량은 계내부에서 마찰력을 극복하면서 수행한 일의 총합과 같으므로(앞에서와 꼭같은 과정임)

$$\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{1}{2}(3m)v_2^2=\mu m g\cdot 2L$$

우의 두 식으로부터 $v_0=\sqrt{6\mu gL}$ 즉 A가 처음속도 $v_0=\sqrt{6\mu gL}$ 로 출발하면 B와 튐성충돌하며 그 다음 B가 운동하여 P앞에까지 와서 그와 상대적으로 정지하게 된다. 때문에 $v_0>\sqrt{6\mu gL}$ 이면 B와 P가 튐성충돌하게 된다. 다시

말하여 B가 P와 튐성충돌할 조건은 $v_0 > \sqrt{6\mu gL}$ 이다.

3) 물체 A의 처음속도가 $v_0 > \sqrt{6\mu gL}$ 이면 A와 B가 튐성충돌하고 그다음 B가 P와 튐성충돌하게 된다. B와 P가 충돌하는 순간에 A, B, C의 속도를 각각 v''_A, v''_B , v''_C 라고 하자. 그러면 $v''_B > v''_A = v''_C$

B와 P의 충돌이 끝난직후 A, B, C의 속도를 각각 v''_A, v''_B, v''_C 로 표시하면(충돌과정에 대해서는 문제 2)에서와 꼭같은 조건을 주고 고찰한다.) 문제 2)에서와 꼭같은 리치로

$$v''_C = v''_B,\quad v''_B = v''_C,\quad v''_C = v''_A$$

우의 식을 보면 물체 B와 P가 충돌한 직후 물체 A와 B의 속도는 같아지며 그의 크기는 C의 속도보다는 작아진다는 것을 알수 있다. 즉 $v'''_C > v'''_A = v'''_B$

그 이후에는 나무판 C가 비교적 큰 가속도로 오른쪽으로 움직이면서 감속운동하며 물체 A와 B는 꼭같으면서 비교적 작은 가속도로 오른쪽으로 움직이면서 가속운동한다. 이 가속도는 각각

$$a_C = 2\mu g,\quad a_A = a_B = \mu g$$

로 된다. 이 가속운동과정은 A와 B, C의 속도가 같아져 이것들이 $v_0/3$ 의 속도로 오른쪽 방향으로 등속운동할 때까지 계속되던지 아니면 이런 속도에 도달하기 전에 물체 A가 C로부터 떨어져내리게 될것이다. 때문에 물체 B와 A는 나무판 C우에서 다시 충돌할수 없다.

4) 이제 A, B, C의 속도가 다 같아지는 순간에 물체 A가 C로부터 떨어지게 되는 경우를 먼저 고찰하자.

이 경우에는 물체 A가 나무판 C의 왼쪽 끝에 도착하는 순간에 A, B, C의 속도가 같아진다. 속도를 v_3 이라고 하자. 그러면 운동량보존법칙으로부터 $mv_0 = 3mv_3$

물체 A가 처음속도 v_0 을 가지고 나무판 C의 왼쪽 끝으로부터 오른쪽으로 운동하기 시작하여 물체 B와 충돌한 후 다시 C의 왼쪽 끝에서 우에서와 같이 떨어지게 되는 전과

정을 다시 돌이켜보면 C우에서 A가 운동한 거리 L, A와 B가 충돌한 후 B가 C우에서 운동한 거리 L, A가 C에서 떨어지기 직전까지 C우에서 A와 B가 운동한 거리도 L이다. 이 전과정에 계에서 운동에네르기의 변화량은 계내부에서 미끄럼마찰력을 극복하면서 수행한 일과 같으므로

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}(3m)v_3^2 = \mu m g 4L$$

이로부터 $v_0 = \sqrt{12\mu gL}$

결국 A의 처음속도가 $v_0 = \sqrt{12\mu gL}$ 인 경우에 바로 A가 C의 왼쪽 끝에 도달하는 순간에 A와 C의 속도가 같아지게 되는것이다. 따라서 물체 A가 C로부터 떨어지게 될 조건은 $v_0 > \sqrt{12\mu gL}$

5) 만일 물체 A의 처음속도가 $v_0 > \sqrt{12\mu gL}$ 조건을 만족한다면 A가 C로부터 떨어져내려오게 된다. A가 C로부터 떨어지려는 순간 A, B, C의 속도를 각각 $v''_{\mathrm{A}''}$, $v''_{\mathrm{B}''}$, $v''_{\mathrm{C}''}$ 로 표시하면 $v''_{\mathrm{A}''} = v''_{\mathrm{B}''} < v''_{\mathrm{C}''}$

이 순간에 보면 운동량보존법칙과 에네르기보존법칙으로부터

$$mv_0 = 2mv''_{\mathrm{A}''} + mv''_{\mathrm{C}''}$$

$$\frac{1}{2}mv_0{}^2 - \frac{1}{2}(2m)v''_{\mathrm{B}''}{}^2 - \frac{1}{2}mv''_{\mathrm{C}''}{}^2 = \mu m g 4L$$

앞에서와 꼭같이 물체 A가 C로부터 떨어진 후에 B가 C의 왼쪽 끝에 도달하는 순간에 B와 C의 속도가 같아지는 경우를 보자. 이때 B의 속도를 v_4 라고 하면 B와 C로 구성된 계에서의 운동량보존법칙에 의하여

$$mv''_{\mathrm{B}''} + mv''_{\mathrm{C}''} = 2mv_4$$

B와 C로 이루어진 계에서 이 과정에 미끄럼마찰력을 극복하면서 수행한 일은 $\mu m gL$ 이므로 에네르기보존법칙에 의하여

$$\left[\frac{1}{2}(2m)v''_{\mathrm{B}''}{}^2 + \frac{1}{2}mv''_{\mathrm{C}''}{}^2\right] - \frac{1}{2}(2m)v_4^2 = \mu m gL$$

우의 식들로부터 $v_0 > \sqrt{16\mu gL}$

이것은 $v_0 > \sqrt{16\mu gL}$ 일 때 물체 B가 나무판의 왼쪽 끝에 와서 멎게 된다는것을 의미한다. 따라서 $v_0 > \sqrt{16\mu gL}$ 인 경우에는 B가 언제나 나무판 C로부터 떨어지게 될것이다. 결국 B가 C로부터 떨어지게 될 조건은 $v_0 > \sqrt{16\mu gL}$

올림픽경연모의문제 Ⅲ

1. 처음에 질점은 수직웃방향으로 등감속직선운동을 하게 되며 그 가속도는 g이다. 한편 질점은 전기마당에 의해 수평방향으로 힘을 받으므로 등가속직선운동도 하게 된다. 이 가속도를 a, 질점이 M점으로부터 N점까지 운동하는데 걸린 시간을 t하고 하면

$$v_x = at = v_0$$
$$v_y = v_0 - gt = 0$$

두 식으로부터 $a = g$, $t = \dfrac{v_0}{g}$

M점과 N점사이의 수평방향으로의 거리는

$$x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{v_0^2}{2g}$$

따라서 M점과 N점사이의 전위차는

$$U_{\mathrm{MN}} = \frac{U}{d}x = \frac{Uv_0^2}{2dg}$$

2. 1) 밀차에 물체를 올려놓은 후 마찰력이 작용하기때문에 물체는 땅면에 대하여 상대적으로 가속운동을 하게 되며 밀차는 감속운동을 하게 된다. 물체가 밀차에 대해 상대적으로 정지하는 순간에는 밀차와 물체의 속도가 같아진다. 이 순간의 속도를 v 라고 하자. 이 과정에 외부계로부터 수평방향으로의 그 어떤 힘도 작용하지 않으므로 밀차와 물체로 이루어진 계에서 수평방향으로의 운동량이 보존되여야 한다. 즉

$$Mv_0 = (m + M)v$$

에네르기적견지에서 보면 물체가 얻게 되는 운동에네르기는다름아니라 마찰력이 물체에 대해 수행한 일과

같아야 한다. 즉

$$\frac{1}{2}mv^2 = \mu m g S_1$$

여기서 S_1는 물체가 이동한 거리이다. 또한 밀차에서 운동에네르기의 변하량(실지는 감소량)도 마찰력이 밀차에 대해 수행한 일과 같아야 한다. 즉

$$\frac{1}{2}Mv^2 - \frac{1}{2}M{v_0}^2 = -\mu m g S_2$$

여기서 S_2은 밀차가 이동한 거리이다. 물체가 밀차에서 떨어지지 않는다는 조건하에서 밀차의 최소길이를 L로 표시하면

$$L = S_2 - S_1$$

우의 네개의 식으로부터

$$L = \frac{Mv_0^2}{2\mu g(m+M)}$$

2) 일과 에네르기사이의 관계로부터 알수 있는 마찰력이 수행한 일은 계(물체+밀차)에서의 운동에네르기의 증가량과 같아야 한다. 즉

$$W = \frac{1}{2}(m+M)v^2 - \frac{1}{2}Mv_0^2$$

이로부터

$$W = -\frac{mMv_0^2}{2(m+M)}$$

3. 1) 변을 열기 전의 평형상태에서 아래, 우 용기속의 액면위치에서의 증기들은 포화상태에 있어야 한다. 그런데 온도가 서로 같으므로 이 포화증기압들도 같아야 한다. 그러나 변의 량쪽에서는 기체의 압력이 서로 달라야 한다.(압력분포가 지수함수적으로 변하기때문에) 변의 왼쪽에서는 액면으로부터의 높이가 낮으므로 기체의 압력이 포화증기압과 거의 같겠지만 오른쪽에서는 밑에 있는 용기속액면으로부터의 위치가 적지 않게 높으므로 기체압력이 포화증기압보다 낮아야 한다. 따라서 변을 열어놓으면 왼쪽의 기체가 오른쪽으로 이동하게 된다. 그런데 관안에서 압력의 분포는 지수함수에 따라 변화되므로 아래쪽 용기의 액면우에서 기체의 압력은 포화증기압

보다 커지게 된다. 따라서 여기서 일부 기체가 액체로 응결되면서 이 용기속의 액체량이 증가된다. 한편 우에 있는 용기를 보면 변을 연 다음 일부 기체가 변의 오른쪽으로 넘어가므로 기체압력이 포화증기압보다 낮아지며 따라서 이 용기속의 액체는 계속 증발되면서 액체량이 작아지게 된다. 이런 과정은 우에 있는 용기에서 액체가 전부 증발되고 아래쪽 용기속에서 그만 한 량의 액체가 응결될 때까지 계속되며 그후에는 상태가 변하지 않게 된다.

2) 이 과정은 웃쪽에 있는 액체가 아래쪽으로 전부 이동하는 과정으로 볼수 있으며 따라서 웃쪽의 액체가 가지고있던 중력포텐샬 mgl 이 질량이 $2m$ 인 액체의 내부에네르기로 넘어가는 과정으로 된다. 때문에 계의 온도가 높아지게 된다. 온도에 따르는 용기, 관, 기체 등의 비열의 변화를 무시하면 최종온도를 T 라고 할 때 에네르기보존법칙으로부터

$$mgl = 2mc(T - T_0)$$

결국

$$T = \frac{gl}{2c} + T_0$$

4. 물체 S에서 출발한 빛선들은 유리의 밑면, 웃면, 볼록렌즈들을 통과하면서 3차례의 영상을 만들며 이것이 관찰자에게 관측되게 된다. 렌즈의 빛축과 유리판의 밑면 및 웃면과의 사귐점을 각각 A, B, 물체 S에서 출발한 빛선은 유리판 밑면에서 굴절되면서 영상 S_1을 만들게 되는데(그림) 굴절법칙에 의해

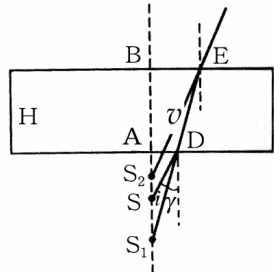
$$\sin i = n \sin \gamma$$

여기서 $n=1$ 로서 공기의 굴절률이다. 그런데 이 빛선은 유리판에 거의나 수직으로 들어오므로 각 i, γ 는 대단히 작으며 따라서

$$\sin i = \tan i, \quad \sin \gamma \approx \tan \gamma$$

로 된다. 결국

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{SA}} = n \frac{\overline{AD}}{\overline{S_1 A}}$$

여기서 $\overline{SA}$ 는 유리판의 밑면으로부터

물체까지의 거리, $\overline{S_1A}$ 는 1차영상까지의 거리이다. 우의 식으로부터 $S_1A = n\overline{SA}$ 이다. 이제 S_1을 어떤 물체로 보면 여기로부터 출발한 빛선이 유리판의 웃면에서 다시 굴절되여 영상 S_2을 만들게 된다. 이때 웃면에서 물체까지의 거리는

$$\overline{S_1B} = \overline{S_1A} + \overline{AB}$$

우와 꼭같은 방법으로 굴절법칙을 리용하여 계산하면

$$\overline{S_2B} = \frac{\overline{S_1B}}{n}$$

여기서 n은 유리의 굴절률이다. 이제는 S_2이라는 물체를 볼록렌즈로 관찰하는 문제로 귀착된다. 볼록렌즈와 유리판웃면사이의 거리를 x라고 하면 렌즈로부터 물체까지의 거리

$$a = x + \overline{S_2B}$$

로 된다. 문제에서 영상까지의 거리가 실제 물체까지의 거리와 같다는 조건을 주었기때문에 영상까지의 거리 b는

$$b = -(x + \overline{SA} + \overline{AB})$$

이 결과들을 얇은 렌즈의 공식에 넣으면

$$\frac{1}{x + \overline{S_2B}} - \frac{1}{x + \overline{SA} + \overline{AB}} = \frac{1}{f}$$

해당한 수값들을 넣으면 $x = 1\text{cm}$로 된다.

5. 1) 태양의 질량을 M_0, 비행선의 질량을 m, 태양주위로 도는 비행선의 궤도반경을 R라고 하자. 문제에서 제기된 방안에 근거하면 비행선이 자기 궤도우에 있는 어떤 위치에서 출발하여 타원궤도의 절반을 거쳐 소행성궤도에 도착한다는것을 알수 있다. 그리고 이 타원은 비행선의 원래의 자리길과 소행성의 자리길에 모두 접한다. 비행선이 이러한 타원자리길을 따라 운동하게 하자면 비행선이 극히 짧은 시간사이에 속도를 얻어 그 값이 v_0으로부터 어떤 u_0으로 변해야 한다. 비행선이 타원궤도를 따라 소행성궤도에 도착할 때의 속도를 u라고 하자. 이때 u_0의 방향과 u의 방향은 모두 타원의 긴 축에 수직으로 된다. 따라서 케플레르의 제2법칙으로부터

$$u_0R = 6uR$$

에네르기보존법칙으로부터

$$\frac{1}{2}mu_0^2 - G\frac{Mm}{R} = \frac{1}{2}mu^2 - G\frac{M_0 m}{6R}$$

만유인력법칙으로부터

$$G\frac{M_0 m}{R^2} = m\frac{v_0^2}{R} \quad \to \quad v_0 = \sqrt{G\frac{M_0}{R}}$$

이로부터

$$u_0 = \sqrt{\frac{12}{7}}v_0 , \quad u = \sqrt{\frac{1}{21}}v_0$$

소행성이 태양주위로 도는 원운동속도를 v, 그의 질량을 M 으로 놓으면 만유인력법칙으로부터

$$G\frac{M_0 M}{(6R)^2} = M\frac{v^2}{6R}, \quad \text{따라서} \quad v = \sqrt{\frac{GM_0}{6R}} = \sqrt{\frac{1}{6}}v_0$$

이로부터 $v > u$ 임을 알수 있다. 이상의 고찰로부터 알수 있는바와 같이 비행선의 출발위치를 잘 선택해서 궤도로부터 리탈시켜야만 소행성자리길에서 소행성과 비행선이 만나게 하여 비행선이 소행성으로부터 충돌을 받게 할수 있는것이다. 이 접근과정을 소행성은 정지되여있고 비행선이 소행성으로 $v\text{-}u$ 의 속도로 접근하는 과정으로 볼수 있다. 소행성의 질량이 비행선의 질량에 비해 대단히 크므로 충돌한 후 비행선은 역시 $u\text{-}v$ 의 속도로 소행성으로부터 반발되며 이때 소행성과 비행선의 운동방향은 같다. 이 경우에 태양에 대한 비행선의 상대속도는 $u_1 = v + v\text{-}u = 2v\text{-}u$ 이다.

따라서

$$u_1 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{1}{21}}\right)v_0$$

비행선이 소행성궤도우에서 반발될 후 태양계를 벗어나려면 그의 최소속도 u_2 이

$$\frac{1}{2}mu_2^2 - G\frac{M_0 m}{6R} = 0$$

의 관계를 만족시켜야 한다. 이로부터

$$u_2 = \sqrt{\frac{GM_0}{3R}} = \sqrt{\frac{1}{3}}v_0$$

이로부터

$$u_1 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{1}{21}}\right)v_0 > \sqrt{\frac{1}{3}}v_0 = u_2$$

결국 비행선이 소행성과 충돌한 후 얻게 되는 속도는 이 비행선이 태양계를 벗어나게 하는데 충분한 속도로 된다.

2) 비행선이 원궤도로부터 들어서자면 그의 속도가 v_0 으로부터 u_0 으로 변해야 하므로 비행선이 분사식발동기로부터 얻게 되는 운동에네르기 E_1 는

$$E_1 = \frac{1}{2}mu_0^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{5}{14}mv_0^2$$

으로 된다. 만일 비행선이 소행성과 충돌없이 타원궤도를 따라 직접 태양계를 탈출하자면 비행선이 가져야 할 최소속도 u_3 이

$$\frac{1}{2}mu_3^2 - G\frac{M_0 m}{R} = 0$$

을 만족시켜야 한다. 즉 최소한

$$u_3 = \sqrt{\frac{2GM_0}{R}} = \sqrt{2}v_0$$

으로 되여야 한다. 이렇게 되자면 분사발동기로부터 받아야 할 운동에네르기값 E_2 이

$$E_2 = \frac{1}{2}mu_3^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

으로 되여야 한다. 그런데

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{5}{14}mv_0^2}{\frac{1}{2}mv_0^2} = 0.71$$

이므로 소행성과의 충돌없이는 비행선이 태양계를 탈출할수 없다.

6. 1) r 만 한 거리에 떨어져있는 두 전하 Q_1 과 Q_2 사이에 작용하

는 꿀롱힘 F_Q 와 꿀롱포텐샬 E_Q 는 각각

$$F_Q = -k_Q \frac{Q_1 Q_2}{r^2}, \quad E_Q = -k_Q \frac{Q_1 Q_2}{r}$$

이다. 이와 류사하게 정T쿼크와 반T쿼크사이의 호상작용포텐샬이

$$E_{(r)} = -k_Q \frac{4a_S}{3r}$$

로 주어지므로 그들사이에 작용하는 호상작용힘은

$$F_{(r)} = -k_Q \frac{4a_S}{3r^2}$$

로 된다. 이제 문제에서 제기된 정, 반T쿼크립자들의 속박상태에서 원운동속도를 v, 그들사이의 거리를 r_0 으로 놓으면 이 립자들이 받게 되는 향심력이 $F_{(r_0)}$ 으로 되므로 이 립자들의 운동방정식은

$$\frac{m_t v^2}{r_0/2} = k \frac{4a_S}{3r_0^{\ 2}}$$

로 된다. 문제에서 주어진 량자화조건에서 바닥상태인 경우에는 $n=1$ 이므로

$$2m_t v\left(\frac{r_0}{2}\right) = \frac{h}{2\pi}$$

우의 두 식으로부터

$$r_0 = \frac{3h^2}{8\pi^2 m_t a_S k} = 1.4\times10^{-17}(\mathrm{m})$$

2) 우의 식들로부터

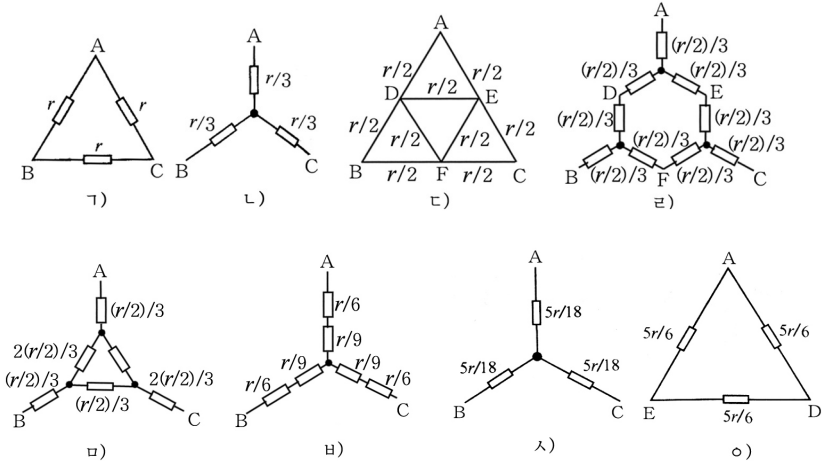
$$v = \frac{\pi}{h}(k\frac{4a_S}{3})$$

임을 알수 있다. v 와 r_0 을 통하여 정, 반T쿼크립자들의 등속원운동주기 T 를 구하면

$$T = \frac{2\pi(r_0/2)}{v} = \frac{h^3}{2\pi^2 m_t a_S k} = 1.8\times10^{-24}\mathrm{s}$$

이로부터 $\frac{\tau}{T} = 0.2$ 으로 된다. 결국 정, 반T쿼크립자들의 수

명은 그들이 만드는 속박상태계에서 원운동주기의 1/5밖에 안된다. 이것은 결국 문제에서 제안된 그러한 속박상태가 보통은 존재하지 않는다는것을 말해준다

7. 1) 먼저 그림의 ㄱ에 보여준 저항값이 r 인 세개의 저항을 3각형으로 련결할 회로에서 임의의 두 정점사이의 저항값이 그림 ㄴ에서처럼 그 값이 1/3인 저항들을 Y형으로 련결한 전기회로에서 임의의 두 정점사이의 저항값과 같다.

따라서 전기회로에서 우의 3각형모양의 전기회로를 Y형의 전기회로로 바꾸어도 전체 전기회로에서는 그 어떤 변화도 생기지 않는다. 즉 우의 3각형전기회로와 Y형전기회로는 등가이다. 이러한 변환을 Δ－Y 등가변환이라고 부른다.

사실 그림 ㄱ에서

$$R_{\mathrm{AB}}(\Delta)=\frac{r\cdot 2r}{r+2r}=\frac{2}{3}r$$

그림 ㄴ에서

$$R_{\mathrm{AB}}(\mathrm{Y})=\frac{1}{3}r+\frac{1}{3}r=\frac{2}{3}r$$

이다.

$$R_{\mathrm{AB}}(\Delta)=R_{\mathrm{AB}}(\mathrm{Y})$$

이제 씨얼핀스키바킹을 한번 분할하면 문제에 준 그림 ㄴ에서와 같이(혹은 그림 ㄷ) 세개의 3각형 △ADE, △DBF, △EFC가 생기며 그 변들에 대응하는 저항은 각각 $r/2$ 로

된다. 이때 구성되는 전기회로는 그림 ㄷ처럼 된다. 이 세 개의 3각형회로를 Y회로로 변환하면 그림 ㄹ로 된다. 이 회로는 그림 ㅁ로 등가시킬수 있다. 그림 ㅁ에서 내부에 있는 3각형회로를 Y회로로 등가시키면 그림 ㅂ로 된다. 따라서

$$R_{\mathrm{AB}}=\frac{5}{9}r$$

로 된다. 이제 아직 분할되지 않은 3각형, 즉 그림 ㄱ에서 두 정점 A, B사이의 저항을 $R(0)$으로 표시하면 $R(0)=2r/3$이다. 다음 1차분할된 후(그림 ㄷ) A, B사이의 저항을 $R_{(1)}$로 표시하면

$$R(1)=\left(\frac{5}{9}\right)r=\left(\frac{5}{3}\right)^{1}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}r\right]=\left[\frac{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{1}\left(\frac{2}{3}\right)r$$

로 된다. 이것은 그림 ㅅ와 같은 Y형회로와 등가로 된다. 이제 그림 ㅅ에 준 Y형회로를 그림 ㅇ에 준 3각형회로로 변환하자. 이때 매 변의 저항은 $5r/6$로 된다. 문제에 준 그림 ㄷ는 2차분할된 후의 도형이다. 이 경우에 △ABC의 두 정점 A와 B사이의 등가저항을 구하자고 하면 분할의 차수가 하나 커질 때 한 변의 저항이 절반으로 작아진다는데 주의를 돌리면 된다. 결국 2차분할되면 문제에 준 그림 ㄴ에서 3각형의 매 변의 저항을 $\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)r$ 혹은 $\frac{5}{6}\left(\frac{1}{2}\right)r$로 바꾸면 된다. 우에서 구한 $R(1)$을 고려하면

$$R(2)=\left[\frac{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{1}\left(\frac{2}{3}\right)\frac{5}{6}r=\left[\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{2}\left(\frac{2}{3}\right)r$$

3차분할한 후에는 △ABC의 두 정점 A, B사이의 등가저항이

$$R(3)=\left[\frac{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{3}\left(\frac{2}{3}\right)r=\frac{250}{648}r$$

로 된다.

2) 우와 같은 방법으로 고찰하면 n차분할된 후 A, B사이의 등가저항이

$$R(n)=\left[\frac{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)\right]^n\left(\frac{2}{3}\right)r$$

임을 쉽게 알수 있다.

3) 아직 분할되지 않은 △ABC의 두 정점사이의 등가저항은

$$R(\mathrm{L}_0)=\left(\frac{2}{3}\right)r$$

인데 이것을 $R(\mathrm{L}_0)=\frac{2}{3}r=k\mathrm{L}_0{}^S$ 로 표시하자. n 차분할된 다음 이 등가저항은

$$R\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n\mathrm{L}_0\right]=\left[\frac{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{\mathrm{n}}\frac{2}{3}r=k\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n\mathrm{L}_0\right]^{\mathrm{S}}$$

우의 두 식에서 k를 없애면

$$\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{S}}$$

$$\ln\left[\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\right]=S\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

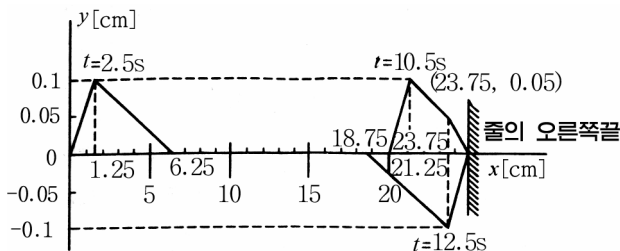
$$S=1+\frac{\ln\left(\frac{5}{3}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}\approx 0.263$$

올림픽경연문제 IV

1. 막대기의 끝점 A가 O점주위로 원운동하고있다. 이때 A점의 속도 v_A의 방향은 막대기 OA에 수직이다. 그리고 고찰순간에 그의 크기는 $v_A=\omega R$이다. 이 속도를 AB방향성분과 AB에 수직인 방향의 성분으로 분해하자. 그리고 v_A방향과 AB방향사이의 각을 β라고 하겠다. 이때 v_A의 AB방향성분이 곧 물체 M의 속도 v_M으로 된다. 여기서 $v_M=v_A\cos\varphi$이다. 한편 시누스정리에 의해

$$\frac{\sin\angle\mathrm{OAB}}{H}=\frac{\sin\alpha}{R},\quad \angle\mathrm{OAB}=\frac{\pi}{2}+\varphi$$

이므로 $v_M=v_A\,\omega H\sin\varphi$

2. 파동의 모양을 그리면 그림과 같다.

3. 기체의 몰질량을 μ, 용기 A의 체적을 V, 변을 열기 전 A속에 있는 기체의 질량을 M, 압력을 P, 온도를 T 라고 하자.

$$PV=\frac{M}{\mu}RT \quad\rightarrow\quad M=\frac{\mu PV}{R}$$

용기 B의 체적이 A에 비해 대단히 크므로 문제에 준 조작과정에 B속에 있는 기체의 압력과 온도는 변하지 않는것으로 볼수 있다. 문제의 조건에 의해 변을 열었다가 닫은 후 A속의 기체 압력은 $2P$로 변하게 된다. 이때의 온도를 T' 라고 하고 질량을 M' 라고 하면

$$M'=\frac{2\mu PV}{RT'}$$

용기 A속으로 더 들어간 기체의 질량은

$$\Delta M=M'-M=\frac{\mu PV}{R}\left(\frac{2}{T'}-\frac{1}{T}\right)$$

이다. 이 기체가 용기 B속에서 차지하고있던 체적을 ΔV 라고 하면

$$\Delta V = \frac{\Delta M}{2\mu P} RT$$

이 기체를 용기 A속에 밀어넣을 때 용기 B속에 있는 기체가 수행하는 일은 $W = 2P\Delta V$ 이다. 우의 세 식으로부터

$$W = PV\left(\frac{2T}{T'} - 1\right)$$

A속에 있는 기체에서 내부에네르기의 변화 ΔU 는

$$\Delta U = \frac{M'}{\mu} \times 2.5R(T' - T)$$

한편 외부계와의 열교환이 없으므로 열력학제1법칙에 의해

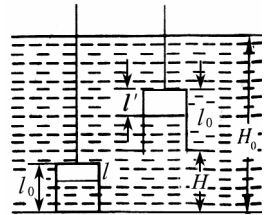
$$W = -\Delta U$$

따라서

$$\frac{2T}{T'} - 1 = 2 \times 2.5\left(1 - \frac{T}{T'}\right)$$

결국 $T' = 353\text{K} = 80^\circ\text{C}$

4. 그림에 보여준것처럼 통을 끌어올리는 과정에 통속의 공기압력은 작아지고 그의 체적은 커진다.

따라서 통과 통속의 공기에 작용하는 뜰힘도 커진다. 만일 이 과정에 통이 받는 뜰힘과 중력이 같아지는 위치가 있다면 이 위치에서는 통이 불안정하므로 좀 더 올라오게 다시말하여 이 위치에서는 통이 자동적으로 떠오르므로 쇠바줄을 당길 필요가 없으며 결국 우리가 관심하고있는《쇠바줄을 당길 필요가 없을 때까지 수행하는 일》이란 호수바닥으로부터 통을 서서히 끌어올리는 과정에 중력과 뜰힘이 같아질 때까지 수행하는 일을 의미하는것으로 된다. 우선 평형위치를 구하자. 중력과 뜰힘이 같다는 조건에 의해

$$mg = \rho(l'S + V_0)g$$

여기서 V_0 은 통을 이루는 금속의 체적이다. 주어진 수값들을 넣으면 $l' = 0.35\text{m}$ 이다. 이때 호수바닥으로부터 통의 밑변두리

까지의 높이를 H 로 표시하면(그림을 보라.) 보일-마리오트의 법칙에 의해

$$\left[P_0+H_0-(l_0-l)\right]l=\left[P_0+H_0-H-(l_0-l')\right]l'$$

여기서 l_0 은 통자체의 높이, l 은 통이 호수바닥에 있을 때 공기기둥의 높이이다. 이로부터 $H=12.24\mathrm{m}$ 이다. 그런데 $H<H_0-l_0$ 이므로 통전체가 여전히 물속에 잠겨있을 때 중력과 뜰힘이 같아진다는것을 알수 있다.

이제 통을 천천히 당겨 호수바닥으로부터 H 위치까지 끌어올렸을 때 통의 력학적에네르기의 변화량을 ΔE 라고 하자. 이 ΔE 는 세개의 부분으로 갈라볼수 있다. 그 첫째는 통자체의 포텐샬에네르기의 증가량 ΔE_1 이다. 둘째는 통자체의 체적에 의해 H 위치에서 밀려나간 물이 호수밑바닥에 통이 있을 때의 위치로 옮겨간것과 같으므로 이에 의한 물에서의 포텐샬에네르기증가량 ΔE_2 이다. 셋째는 H 위치까지 올라오면서 통속의 기체가 밖으로 밀어낸 물에 의한 몫인데 이 물은 그 일부분이 통이 호수바닥에 있을 때 공기가 있던 자리로 이동하고 나머지는 호수겉면으로 올라온것으로 볼수 있다. 이에 의한 포텐샬에네르기의 변화량(증가량)은 ΔE_3 으로 표시하자. 그러면

$$\Delta E_1=mgH,\quad \Delta E_2=-\rho V_0 gH$$

$$\Delta E_3=\rho Sgl\left(l_0-\frac{1}{2}l\right)+\rho S(l'-l)gH_0-\rho Sgl'\left(H+l_0-\frac{1}{2}l'\right)$$

로 된다. 따라서 $\Delta E=\Delta E_1+\Delta E_2+\Delta E_3$ 이므로 정리하면

$$\Delta E=\rho Sg\left[(l'-l)(H-l_0)+\frac{1}{2}(l'^2-l^2)\right]$$

수값을 넣으면 $\Delta E=1.37\times10^4\,\mathrm{J}$

5. 회전궤도에 들어서면서부터 제스코타의 속도는 감소되며 회전궤도전체에 차량들이 다 들어찰 때 (그다음에는 계속 이 상태가 유지된다.) 렬차의 속도가 최소값 v 에 이르게 된다. 이때 전체렬차의 력학적에네르기는 수평궤도를 달릴 때와 같아야 한다. 즉

$$\frac{1}{2}Mv_0^2=\frac{1}{2}Mv+\left(M\frac{2\pi R}{L}\right)gR$$

이 식에서 M 은 렬차의 전체 질량, v_0 은 수평궤도에서의 속도(처음속도), $M\dfrac{2\pi R}{L}$ 는 회전궤도우에 있는 차량들의 총질량, R 는 이것들의 질량중심의 높이이다. 회전궤도우에 있는 매개 차량들은 궤도에 의한 맞선힘의 작용을 받게 되는데 이에 의해 차량바퀴에 생기는 압력은 회전궤도의 정점에서 최소로 된다. 차량이 궤도에서 리탈되여 아래로 떨어지지 않기 위한 극한조건은 차량이 궤도에 주는 압력이 령으로 되는것이다. 정점에서 차량은 중력도 받게 되며 이 두 힘의 합은 수직아래방향으로 향하며 차량에 대한 향심력의 역할을 한다. 따라서 차량이 아래로 떨어지지 않자면 이 힘과 같은 원심력을 가져야 하므로 회전궤도의 정점에서

$$2T\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\Delta mg=\Delta m\frac{v^2}{R}$$

이 성립되여야 한다. 여기서 각 α 는 회전궤도우의 x만 한 길이의 차량들에 해당한 중심각이며 α 가 작다는것을 고려하여

$$\alpha=\frac{\Delta x}{R}\approx\sin\alpha$$

로 보았다. (그림 ㄱ)

ㄱ)

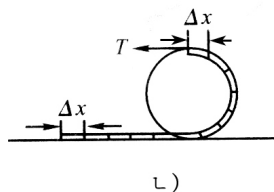
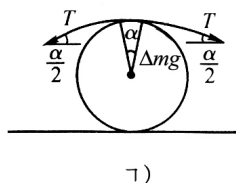
$$\Delta m=\frac{\Delta x}{L}M=\frac{\alpha R}{L}M$$

(두 차량사이의 거리는 무시함)임을 고려하면 우의 식을

$$T+\frac{R}{L}Mg=M\frac{v^2}{L}$$

으로 쓸수 있다. 이제 장력(궤도에서 접성방향으로 작용하는 힘) T 를 구하겠다. 원형궤도의 정점부근에 놓여있는 차량들을 주목하자. (그림 ㄴ)

ㄴ)

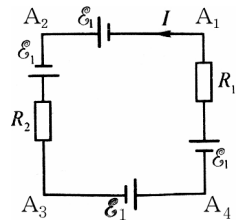
이 차량들이 어떤 작은 거리 Δx 만큼 이동할 때 힘 T 가 수행하는 일은 $W=T\cdot\Delta x$ 로 된다. 그러나 이 과정에 차량들의 이동속도가 변하지 않으므로 이 일은 수평궤도에 있던 Δx 길이에 해당하는 차량의 질량 Δm 이 $2R$ 높이만큼 올라갈 때의 포텐샬에

네르기의 증가량과 같아야 한다. 이때 $\Delta m=\left(\frac{M}{L}\right)\Delta x$ 이다. 따라서 $T\Delta x=\left(\frac{M}{L}\right)\Delta xg2R$ 이며 $T=2\left(\frac{M}{L}\right)gR$ 로 된다. 결국 렬차의 처음속도 v_0 은

$$v_0=\sqrt{Rg\left(3-\frac{4\pi R}{L}\right)}$$

6. 1) 렌쯔의 규칙을 리용하여 회로에 생기는 전체 유도전동력을 고찰해보면 유도전류의 흐름방향이 시계바늘회전방향과 반대로 됨을 알수 있다. 그리고 옴의 법칙에 의해

$$\mathscr{E}=I(R_1+R_2)=10\text{V}$$

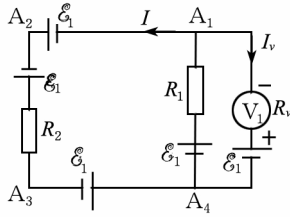
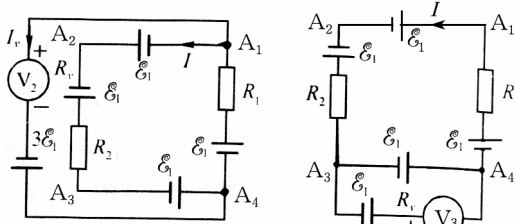
또한 B에 대한 도선들의 대칭성으로부터 매개의 변에 생기는 유도전동력의 크기가 같다는것도 판단할수 있다. 그 값을 $\mathscr{E}$ 로 표시하면 그림과 같은 회로를 그릴수 있다. 이때

$$\mathscr{E}_1=\frac{\mathscr{E}}{4}=2.5\text{V}$$

전원을 포함하고있는 회로에서의 옴의 법칙을 리용하여 수값계산을 하면

$$U_{12}=-\mathscr{E}_1=-2.5\text{V},\quad U_{23}=IR_2-\mathscr{E}_1=4.5\text{V}$$
$$U_{34}=-\mathscr{E}_1=-2.5\text{V},\quad U_{41}=IR_1-\mathscr{E}_1=0.5\text{V}$$

2) 문제의 그림 19의 ㄴ에서 닫긴회로 $A_1V_1A_4A_1$안에서 자력선묶음의 시간적변화가 없으므로 여기서는 전체 유도전동력이 령이여야 한다. 이렇게 되자면 $A_1V_1A_4$부분회로에 $A_1R_1A_4$ 회로에 생기는 전동력 $\mathscr{E}_1$ 을 상쇄시키는 어떤 전원이 포함되는것으로 보아야 한다. 따라서 이에 해당한 등가회로를 그리면 그림 ㄱ와 같다.

ㄱ)

ㄴ) ㄷ)

이때 전압계는 +극으로부터 −극으로 흐르는 전류 I_V 와 전압계의 내부저항 R_V 의 승적값이 나타나게 되는데 R_V 값이 대단히 크므로 I_V 값은 거의나 령에 가깝다.(그러나 R_V I_V 는 유한한 값이다.) 이 닫긴회로에서 옴의 법칙은

$$IR_1 + I_V R_V = IR_1 - U_1 = 0 \;\rightarrow\; U_1 = IR_1 = 3\text{V}$$

꼭같은 리치로 문제의 그림 19의 ㄷ에 해당한 등가회로는 그림 ㄴ와 같다. 이때 닫긴회로 $A_1V_2A_4A_1$에서의 전체유도전동력은 $\mathscr{E}$과 같다. 따라서

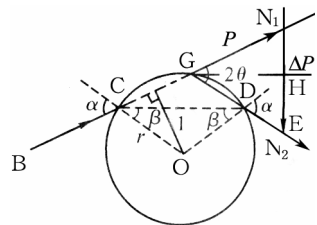
$$IR_1 + I_V R_V = IR_1 + U_2 = \mathscr{E} \;\rightarrow\; U_1 = \mathscr{E} - IR_1 = 7\text{V}$$

문제의 그림 ㄹ에 해당한 등가회로는 그림 ㄷ와 같다.
이때닫긴회로 $A_3V_3A_4A_3$에서의 유도전동력은 령이다. 그리고 도선들에서 A_3A_4부분의 저항이 령이므로

$$U_3 = I_V R_V = 0$$

7. 그림에서 직선 BC와 구의 중심 O를 포함하는 평면내에서 레이자빛이 두번 굴절되는 행로는 BCDE와 같다. 여기서 BC와 굴절빛선 DE의 연장선들의 사귐점을 G로 표시하였다. 빛의

굴절법칙에 의하면

$$n_0 \sin\alpha = n\sin\beta$$

여기서 α 와 β 는 대응하는 입사각과 굴절각이다. 그리고 $\sin\alpha = \frac{l}{r}$ 이다. 한편 문제에서 레이자빛의 진동수가 변하지 않는다는 조건을 주었으므로 입사하는 빛량자의 운동량 P 와 두번 굴절된 후 빛량자의 운동량 P' 는 같아야 한다. 즉

$$P = \frac{hv}{c} = P'$$

여기서 h는 플랑크상수, c는 진공속에서의 빛속도이다. 이때 P 와 P' 의 방향은 2θ 만큼 다르다. 그림을 보면

$$2\theta = 2(\alpha - \beta)$$

임을 기하학적으로 판정할수 있다. 이제 $\vec{P}$ 를 $\overrightarrow{GN_1}$ 로, $\vec{P'}$ 를 $\overrightarrow{GN_2}$ 로 표시하면

$$\Delta P = 2P\sin\theta = 2\frac{hv}{c}\sin\theta$$

여기서 $\triangle GN_1N_2$은 2등변3각형이며 밑변 N_1N_2에서 정점 G까지의 높이 GH는 CD와 평행이다. 따라서 빛량자의 운동량변화량 ΔP 의 방향은 CD에 수직이면서 G점으로부터 O점으로 향한다. 한편 이 빛량자가 작은 구와 호상작용하는 시간 Δt 는 레이자빛이 구안에서 전파되는 시간으로 볼수 있다. 즉

$$\Delta t = \frac{2r\cos\beta}{c\,n_0/n}$$

우의 식에서 $\frac{cn_0}{n}$ 은 구안에서 레이자빛의 전파속도이다. 뉴톤의 제2법칙에 의해 $f = \frac{\Delta P}{\Delta t}$ 이므로 작은 구가 빛량자 1개에 주는 힘의 평균값은

$$f = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{n_0 hv\sin\theta}{nr\cos\beta}$$

이다. 뉴톤의 제3법칙에 의하면 빛량자 1개가 구에 주는 힘 F 는 f 와 크기는 같고 방향은 반대이므로

$$F=\frac{n_0 hv\sin\theta}{nr\cos\theta}$$

이며 방향은 O로부터 G로 향한다. 삼각공식들을 리용하여 우의 식을 정리하면

$$F=\frac{n_0\,l\,h\,v}{nr^2}\left[1-\sqrt{\frac{r^2-l^2}{(nr/n_0)^2-l^2}}\right]$$

8. 1) 구의 운동궤도

그림 ㄱ에서처럼 x, y축과 자리표원점을 정하자. 이제 구가 N점까지 미끄러져내려왔는데 끈이 아직 끊어지지 않았다고 하자. 이때 막대기에 꿰여있는 고리는 B위치에 있게 되는데 BN은 x축에 수직으로 된다. 따라서 구의 x, y 자리표는

$x=\mathrm{PN}$, $y=\mathrm{BN}$ 으로 된다. 여기서 △ANP는 직3각형이므로

$$(h-y)^2+x^2=(l-y)^2$$

정리하면

$$x^2=-2(l-h)y+(l^2-h^2)$$

ㄱ)

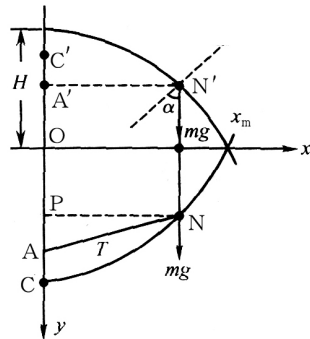
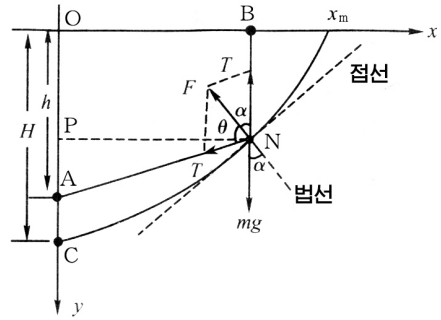
이것은 y축을 대칭축으로 하고 정점의 y자리표가 $y=\frac{1}{2}(l+h)$ 이면서 초점과 정점사이의 거리가 $\frac{1}{2}(l-h)$ 인 포물선이다. 그림 ㄱ에서 x_mNC가 바로 이 포물선인데 여기서

$$H=\frac{1}{2}(l+h)$$

이고 A점이 초점이다.

ㄴ)

2) N점에서 구의 운동방정식

끈의 질량을 무시하므로 구와 접촉하고있는 끈을 구의 한 부

분으로 보아도 된다 이때 구는 3가지 힘을 받는다. 그것은 중력 mg와 구 량쪽의 끈들이 구를 당기는 힘들이다. 이 두 장력들의 방향은 각각 $\overrightarrow{\mathrm{NA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{NB}}$ 이며 크기는 서로 같아야 한다. 이 크기를 T로 표시하자. 이 두 힘의 합력 F의 크기는

$$F = 2T\cos\alpha$$

여기서 각 α는 AN과 BN사이의 각의 절반이며 F의 방향은 ∠ANB 의 2등분선방향이다. 한편 AN은 포물선의 초점과 점을 련결한 선분이므로 포물선의 성질로부터 N점에서 포물선에 그은 수직선(법선)은 ∠ANB 의 2등분선으로 된다. 결국 힘 F의 방향은 N점에서 그은 법선방향과 일치된다. 이상의 고찰내용과 뉴톤의 제2법칙, 문제에서 보충적으로 설명한 내용들을 종합하면 N점에서 구의 운동방정식(법선방향)은

$$2T\cos\alpha - mg\cos\alpha = m\frac{v^2}{R}$$

으로 된다. 여기서 R는 N점에서 포물선의 곡률반경이며 v는 N점에서 구의 속도이다. 력학적에네르기보존법칙에 의하면 여기서 $v = \sqrt{2gy}$로 된다.

3) 곡률반경 R의 계산

끈이 끊어질 때 $T = T_d$로 되므로 곡률반경 R와 y사이의 관계만 밝히면 이때의 구의 y자리표를 이제는 알수 있게 되여있다. 이를 위하여 다음과 같은 한가지 방법을 리용하겠다. 그림 ㄴ에 우에서 고찰한 포물선궤도를 x축에 대칭되게 하나 더 그려놓았다. 이때 새로 그려진 곡선이 H높이에서 수평으로 던진 물체의 운동궤도라는것을 쉽게 추리할수 있다. 이러한 물체의 운동궤도가 포물선이라는것, 그리고 이 경우에 힘관계 및 운동방정식은 우리가 이미 잘 알고있는 내용들이다. 따라서 이러한 방법을 리용하면 운동방정식을 풀지 않고도 력학적원리에 기초하여 물체의 운동과정을 알수 있고 또 N의 대칭점 N′에서의 포물선의 곡률반경 R와 y사이의 관계(이것은 곧 N점에서의 R와 y사이관계와 같다.)를 쉽게 알수 있다. 사실 수평으로 던진 물체가 땅걸면

에 떨어질 때까지 걸린 시간을 t 라고 하면

$$v_0 t = \sqrt{l^2 - h^2}$$

이로부터

$$v_0 = \sqrt{g(l-h)}$$

N′ 위치에서 물체의 속도를 v' 라고 하면 력학적에네르기보존법칙으로부터 $v'^2 = v_0^2 + 2g(H - BN')$ 로 되므로 N′ 위치에서 법선방향의 운동방정식은

$$mg\cos\alpha = m\frac{v'^2}{R}$$

이로부터

$$R = \frac{2(l - \mathrm{BN'})}{\cos\alpha}$$

이것은 곧 N위치에서 포물선의 곡률반경과 같다. 그리고 $\mathrm{BN} = \mathrm{BN'} = y$ 이므로 $R = \dfrac{2(l-y)}{\cos\alpha}$

4) 끈이 끊어지는 순간 구의 위치와 속도 v 와 R 를 운동방정식에 넣으면 장력 T 는

$$T = \frac{mgl}{2(l-y)}$$

$T = T_\alpha$ 일 때 끈이 끊이지며 이때의 구의 자리표를 (x_d, y_d) 로 놓으면 우의 식으로부터

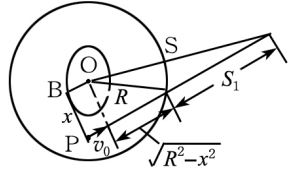
$$y_d = l\left(1 - \frac{mg}{2T_\alpha}\right), \quad x_d = \sqrt{mgl\left(\frac{l-h}{T_d}\right) - (l-h)^2}$$

이때의 속도는

$$v_d = \sqrt{2gy_d} = \sqrt{2gl\left(1 - \frac{mg}{2T_d}\right)}$$

올림픽경연모의 문제 V

1. 1) 그림에서 원탁면이 매끈하고 끈은 늘어나지 않으면서 부드러우므로 끈이 끊어지지 않는 한 운동전 과정에 끈은 팽팽하게 당겨져있다. 때문에 끈이 끊어지지 않은 상태에서 물체가 원탁면우에서 운동하

는 전 과정에 물체의 운동속도방향이 당겨져있는 끈에 수직이므로 끈에 작용하는 장력은 일을 수행하지 않는다. 따라서 물체의 운동속도의 크기가 변하지 않는다. 끈이 끊어지는 순간에 당겨져있는 끈(직선부분)의 길이가 x, 물체의 운동속도가 v_x 였다고 하면 $v_x = v_0$ 이며 따라서 끈이 물체를 당기는 장력은 물체속도의 방향만 변화시키며 결국 물체에 대한 향심력의 역할만 하게 된다. 즉

$$T_0 = \frac{mv_x^2}{x} = \frac{mv_0^2}{x} \rightarrow x = \frac{mv_0^2}{T_0} = 0.6\text{m}$$

2) 끈이 끊어지는 순간 물체가 원탁면우의 P점에 있었다고 하자. 여기서 BP는 끈이 팽팽히 당겨진 부분이다.
그리고 물체의 속도 v_0 의 방향은 이에 수직이다. 문제의 조건으로부터 OB⊥BP이다. 따라서 물체가 원탁면에서 리탈되는 순간에도 그의 속도는 역시 v_0 이다. 물체가 원탁면우에서 떨어진 다음에는 v_0 속도로 수평으로 던진 물체로 된다. 이 물체가 수평방향으로 운동한 시간을 t 하고 하면

$$H = \frac{1}{2}gt^2 \text{(수직방향으로 떨어진 높이)}$$

로 되며 이 물체가 수평방향으로 이동한 거리 S_1 는

$$S_1 = v_0 t$$

따라서 원탁의 중심 O로부터 물체가 떨어진 위치까지의 수평거리 S 는

$$S=\sqrt{(S_1+\sqrt{R^2-x^2})^2+x^2}=$$

$$=\sqrt{\left(v_0\sqrt{\frac{2H}{g}}+\sqrt{R^2-x^2}\right)^2+x^2}=2.5\text{m}$$

2. 금속막대기가 내려오는 속도가 v일 때 회로에 생기는 유도전동력 $\mathscr{E}_i$와 전원의 전동력 $\mathscr{E}$의 방향은 반대로 된다. 이때 회로에서 시계바늘운동방향과 반대방향으로 흐르는 전류의 세기 I는

$$I=\frac{\mathscr{E}_i-\mathscr{E}-\mathscr{E}_L}{R+r}=\frac{Blv-\mathscr{E}-\mathscr{E}_L}{R+r}$$

이다. 여기서 $\mathscr{E}_L$은 유도권선 L에서 생기는 유도전동력이다. 이 전류가 자기마당속에서 받게 되는 자기힘은

$$F=BIl=\frac{Bl(Blv-\mathscr{E}-\mathscr{E}_L)}{R+r}$$

로 된다. v가 작을 때에는 F가 부의 값으로 되며 수직아래방향으로 향한다. v가 커짐에 따라 F는 부의 값으로부터 정의 값으로 변하며 최대속도에 이르렀을 때는

$$F=mg,\quad \mathscr{E}_L=0$$

$$mg=\frac{Bl(Blv-\mathscr{E})}{R+r}$$

으로 되며 합력은 0으로 된다. 결국 막대기가 가지게 되는 최대락하속도는

$$v_{최대}=\frac{mg(R+r)}{(Bl)^2}+\frac{\mathscr{E}}{Bl}=122.5\text{m/s}$$

3. 우선 그림의 $T-V$선도에서 주어진 상태방정식을 리용하여 순환과정을 $P-V$선도에 그려보자. 우에서 주어진 $1\to2$과정의 방정식을 P, V로 표시하면

$$P=2RT_1\left(1-\frac{1}{2}\beta V\right)\beta=-R\beta^2T_1V+2R\beta T_1$$

이 과정은 $P-V$선도에서 직선으로 나타난다. $2\to3$과정에는 T와 V가 비례하므로 등압과정이며 $P-V$선도에서는 V축에 평행이면서 상태점 2를 지나는 직선으로 표시된다. 이 과정의 방정식은 $P=P_2$로 된다. $3\to1$과정의 방정식은 $P=R\beta^2T_1V$로

표시되므로 $P-V$ 선도에서 원점을 지나는 직선의 일부분으로 될것이다. 다음으로 $P-V$ 선도에서의 1, 2, 3점에 해당한 자리표들을 각각 (P_1, V_1), (P_2, V_2), (P_3, V_3)으로 표시하자. 문제에서 준 $1\to2$과정의 방정식으로부터

$$V_1=\frac{1}{\beta},\quad V_2=\frac{3}{2\beta}=\frac{3}{2}V_1$$

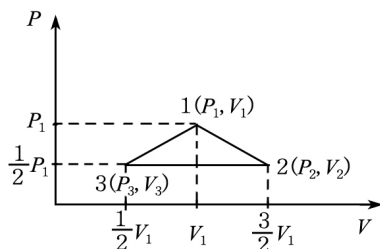
상태방정식들을 리용하면

$$P_1=R\beta T_1,\quad P_2=\frac{1}{2}R\beta T_1=\frac{1}{2}P_1$$

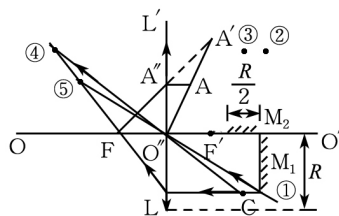
이로부터 상태점 3에서의 체적 V_3은

$$V_3=\frac{1}{2\beta}=\frac{1}{2}V_1$$

로 된다. 이상의 고찰내용들을 종합하여 $P-V$ 선도에 그리면 이 순환과정이 그림에서와 같이 2등변3각형으로 표시된다.

한 순환과정에 기체가 외부계에 수행한 일은 이 2등변3각형의 면적으로 되므로

$$A=\frac{1}{2}(P_1-P_2)(V_2-V_1)=0.25RT_1$$

4. 1) 그림에서 A와 A′를 련결하는 직선의 연장선이 빛축과 사귀는 점 O″가 렌즈중심의 위치로 된다.

LL′는 렌즈의 크기를 표시한것이다. A점으로부터 빛축에 평행되게 그은 직선과 LL′의 사귐점을 A″하고 하자. 다음 A′와 A″를 련결한 직선의 연장선이 빛축과 사귀는 점을 F로 표시하면 이것이 렌즈의 초점으로 된다. O″에 대한 F의 대칭점 F′도 다른 하나의 초점이다.

2) 2개의 실영상과 3개의 허영상이 있다. ④, ⑤는 실영상이고 ①, ②, ③은 허영상이다.

3) 그림에 표시해준것과 같다.

5. dc변이 자기마당구역의 웃경계 PP′에 도착한 순간에 도선틀의 락하속도를 v_1 라고 하면 $\frac{1}{2}mv_1^2 = mgh$ 로 된다. 문제의 조건을 고려해보면 dc변이자기마당구역안에 들어선 다음부터 자기힘의 작용을 받지만 일정한 구간까지는 여전히 가속되면서 락하한다는것을 알수 있다. dc변과 PP′사이의 거리가 Δh_1 로 될 때 도선틀의 락하속도가 최대값에 이르렀다고 하고 이때의 속도를 v_0 이라고 하자. 이 순간에 도선틀에서 생기는 유도전동력은 $\mathscr{E} = Bl_1 v_0$ 이며 도선틀로 흐르는 전류의 세기는

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{Bl_1 v_0}{R}$$

도선틀에 작용하는 자기힘은

$$f = Bl_1 I = \frac{B^2 l_1^2 v_0}{R}$$

이다. 도선틀의 락하속도가 최대로 되자면 이 자기힘과 중력이 비겨야 하므로

$$f = mg$$

따라서

$$v_0 = \frac{mgR}{B^2 l_1^2}$$

한편 dc변이 Δh_1 만큼 락하하는 동안 중력이 수행한 일을 $W_1 (W_1 = mg\Delta h_1)$, 자기힘이 수행한 일을 W_2 이라고 하면 에네르기보존법칙에 의해

$$W_1 + W_2 = \frac{1}{2}mv_0 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

따라서 자기힘이 수행한 일은

$$W_2 = -mg\Delta h_1 + \frac{m^3 g^2 R^2}{2B^4 l_1^4} - mgh$$

도선틀의 속도가 v_0 에 이른 다음부터는 등속으로 락하하게 되는데 dc변이 $\Delta h_2 = l_2 - \Delta h_1$ 만큼 등속운동하면 ab변이 PP′에 이르게 될것이며 이때부터는 도선틀전체가 자기마당속에 들어오

게 된다. 이때까지 중력이 수행한 일을 W_1', 자기힘이 수행한 일을 W_2'로 표시하면 $W_1'+W_2'=0$으로 되여야 한다. 도선틀전체가 자기마당속에 들어온 다음부터 dc변이 QQ'에 도착할 때까지는 도선틀전체에 작용하는 암페아힘이 0이므로 그가 수행하는 일도 0이다. 따라서 전체 과정에 자기힘이 수행하는 일은

$$W=-mg(h+l_2)+\frac{m^3g^2R^2}{2B^4l_1^4}$$

6. 1) 지구질량을 $M_{지}$, 탐측기(부가설비 포함)질량을 m이라고 하면 지구겉면근방에서 탐측기의 운동에네르기 E_K와 만유인력포테샬 E_P는 각각

$$E_K=\frac{1}{2}mv^2,\quad E_P=-G\frac{M_{지}m}{R_{지}}$$

탐측기가 인공행성으로 되였을 때 그의 만유인력포텐샬은 $E_P'=0$으로 볼수 있고 지구에 대한 그의 상대속도도 령이므로 $E_K'=0$으로 볼수 있다. 결국 력학적에네르기보존법칙에 의해

$$\frac{1}{2}mv^2-G\frac{M_{지}m}{R_{지}}=0$$

이로부터

$$v=\sqrt{2\frac{GM_{지}m}{R_{지}}}=\sqrt{2gR_{지}}=1.12\times10^4\mathrm{m/s}$$

2) 인공행성이 된 탐측기를 화성에 보내자면 반드시 적당한 시각을 택하여 탐측기를 싣고있는 로케트발동기를 시동시킴으로써 탐측기가 문제의 그림 ㄱ에 보여준 타원궤도를 따라 화성궤도와의 내접점에 도착하도록 해야 이 위치에서 화성과 만나게 할수 있다. 때문에 반드시 탐측기와 화성의 상대위치를 고려하여 이러한 발사시간을 정해야 한다. 그런데 지구의 공전궤도우에서 탐측기의 운동주기 $T_{탐}$과 지구의 공전주기 $T_{지}$는 같다. 즉

$$T_{탐}=T_{지}=365\mathrm{d}$$

케플레르 제3법칙에 의하여 화성의 공전주기 $T_{화}$ 는

$$T_{화} = 365\sqrt{1.5^3}\ \mathrm{d} == 671\mathrm{d}$$

탐측기가 운동하게 되는 타원궤도의 긴 반경은

$$\frac{R_0 + 1.5R_0}{2} = 1.25R_0$$

따라서 이 타원궤도에서 탐측기의 운동주기 $T'_{탐}$ 는

$$T'_{탐} = 365\sqrt{1.25^3}\mathrm{d} = 510\mathrm{d}$$

그러므로 탐측기가 발사된 시각부터 화성궤도에 들어설 때까지 걸리는 시간은

$$\frac{T'_{탐}}{2} = 255\mathrm{d}$$

탐측기가 발사되기 전에 태양주위를 도는 각속도 $\omega_{탐}$ 은

$$\omega_{탐} = \omega_{지} = \frac{360^\circ}{365d} = 0.986^\circ/\mathrm{d}$$

태양주위를 도는 화성의 각속도 $\omega_{화}$ 은

$$\omega_{화} = \frac{360^\circ}{617\mathrm{d}} = 0.537^\circ/\mathrm{d}$$

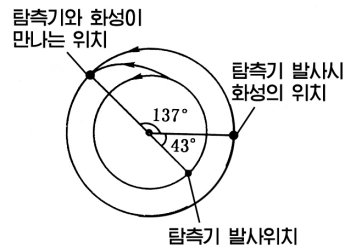
탐측기가 화성궤도까지 도착하는데 255d 가 요구되는데 이 동안에 화성이 돌아가는 각거리는

$$\frac{\omega_{화} T'_{탐}}{2} = 0.537^\circ/\mathrm{d} \times 255\mathrm{d} = 137^\circ$$

결국 탐측기를 발사하는 순간에 화성은 탐측기가 화성궤도에 들어서는 위치로부터 137°만 한 각거리앞에 있어야 하며 이 순간에 탐측기와 화성사이의 각거리는

$$180^\circ - 137^\circ = 43^\circ$$

만큼 차이나야 한다.

문제조건에 의해 어느해 3월 1일 0h에 탐측기와 화성사이의 각거리가 60° (화성이 앞에, 탐측기는 뒤에)임을 알고있다. 이 각거리가 43° 되자면 일정한 시

간을 기다려야 한다. 이 시간을 날자로 계산하여 t 라고 하자. 그러면

$$60^\circ - 43^\circ = \omega_{탐} t - \omega_{화} t$$

따라서

$$t = \frac{60^\circ - 43^\circ}{\omega_{탐} - \omega_{화}} = 37.86\text{d} \approx 38\text{d}$$

즉 탐측기의 발사날자는 3월 1일로부터 38일후 4월 7일로 정해야 한다.

7. 문제의 조건으로부터 다음과 같은것을 알수 있다. 처음에 A속에 있던 He기체의 질량은 $m_{\text{He}} = 4.003\times10^{-3}\text{kg}$, B속에 있던 Kr기체의 질량은 $m_{\text{Kr}} = 83.8\times10^{-3}\text{kg}$, C속에 있던 Xe기체의 질량은 $m_{\text{Xe}} = 131.3\times10^{-3}\text{kg}$ 이였는데 이 기체들을 혼합한 후 A속에 있던 He의 1/3은 B속으로, 다음 1/3은 C속으로 들어갔다. 이때 He의 중력포텐샬의 증가량은

$$\Delta E_{\text{He}} = \frac{1}{3} m_{\text{He}} g(-h) + \frac{1}{3} m_{\text{He}} g(-2h) = m_{\text{He}} gh$$

또한 B속에 있던 Kr의 1/3은 A속으로, 다음 1/3은 C속으로 들어갔으므로 Kr의 중력포텐샬증가량은

$$\Delta E_{\text{kr}} = \frac{1}{3} m_{\text{kr}} gh + \frac{1}{3} m_{\text{kr}} g(-h) = 0$$

C속에 있던 Xe의 1/3은 A속으로, 다음 1/3은 B속으로 들어갔으므로 Xe의 중력포텐샬증가량은

$$\Delta E_{\text{Xe}} = \frac{1}{3} m_{\text{Xe}} gh + \frac{1}{3} m_{\text{Xe}} g(2h) = m_{\text{Xe}} gh$$

따라서 기체를 혼합한 후 중력포텐샬의 전체 증가량은

$$\Delta E_P = \Delta E_{\text{He}} = \Delta E_{\text{kr}} + \Delta E_{\text{Xe}} = (m_{\text{Xe}} - m_{\text{He}}) gh$$

그런데 구는 단열되여있고 외부힘이 수행하는 일도 없으므로 중력포텐샬이 증가되면 그만큼 내부에네르기가 감소되여야 한다. 한편 기체의 체적이 일정하므로 기체는 일을 수행하지 않는다. 결국 열력학제1법칙으로부터 이 경우에 혼합기체에 준 열량은 내부에네르기의 증가량과 같아야 한다. 그런데 리상기체의 내부네르기는 온도만의 함수이고 체적에 무관계하므로 온

도의 변화량이 같아야 한다. 따라서 체적이 일정할 때 내부에네르기의 증가량은 임의의 과정을 거치는 리상기체에서의 내부에네르기의 증가량과 같게 된다. 문제의 조건에 의해 고찰하는 리상기체가 모두 $3m$이라는데 주의를 돌리면

$$\Delta E_P = -3\times\frac{3}{2}R\Delta T$$

이 식의 오른변은 기체에서 내부에네르기의 감소량이며 ΔT 는 기체에서 온도의 증가량이다. 이로부터

$$\Delta T = -\frac{2(m_{\mathrm{Xe}} - m_{\mathrm{He}})gh}{9R}$$

$R = 8.31\mathrm{J/(K\cdot mol)}$ 임을 고려하여 값을 계산하면

$$\Delta T = -3.3\times10^{-2}\mathrm{K}$$

따라서 혼합기체의 온도는 $3.3\times10^{-2}\mathrm{K}$ 만큼 낮아진다.

8. 1) 탑의 밑부분을 포텐샬에네르기의 기준점으로 잡으면 에네르기보존법칙에 의해

$$hv_0 + m_0 gH = hv + 0,\quad m_0 c^2 = hv_0$$

따라서

$$v = \left(1 + \frac{gH}{c^2}\right)v_0$$

이며 $v > v_0$ 으로 된다. 결국 빛량자의 색갈이 붉은색쪽으로 변한다.

2) 탑의 밑부분을 포텐샬에네르기의 기준점으로 잡으면 에네르기보존법칙에 의해

$$hv_0 - m_0 gH = hv + 0,\quad m_0 c^2 = hv_0$$

결국

$$v = \left(1 - \frac{gH}{c^2}\right)v_0,\quad v < v_0$$

이때에는 빛량자의 색갈이 보라색쪽으로 변한다.

3) 포텐샬에네르기가 령인 위치가 무한히 먼곳이므로 에네르기보존법칙에 의해

$$h\nu_0 - \frac{GMm_0}{R} = h\nu_\infty + 0, \quad m_0c^2 = h\nu_0,$$

$$\nu_\infty = \left(1 - \frac{GM}{c^2R}\right)\nu_0$$

4) $\frac{M}{R} = \frac{c^2 Z}{G(Z+1)}$

5) $Z_0 \ll Z \ll 1$이므로

$$\frac{M}{M_0} = \frac{RZ}{R_0 Z_0}$$

따라서

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{M}{M_0}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{-3} = \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-2}\frac{Z}{Z_0} = \frac{150}{0.007\ 3^2} \approx 3\times10^6$$

국제물리올림픽문제풀이집

집 필 박사 부교수 유광동, 리철수, 조태수 심 사 심의위원회

편집 및 콤퓨터편성 김영숙

장 정 류명심, 장대길 교 정

낸 곳 교육도서출판사

인쇄소

인 쇄 주체101(2012)년 월 일 발 행 주체101(2012)년 월 일

교- 부 값 원